

Integration

Soit $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}$ et $I = \int_0^{1/2} f(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x} dx$

Sous la forme d'une fraction, il est difficile d'intégrer I , c'est pourquoi il faut simplifier $f(x)$ pour le mettre sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$. Pour cela cherchons a, b, c, d .

① Méthode d'identification de polynômes (membre à membre)

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}}{1-x} = \frac{(ax^2 + bx + c)(1-x) + d}{1-x} = \frac{ax^2 - ax^3 + bx - bx^2 + c - cx + d}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{-ax^3 + (a-b)x^2 + (b-c)x + c+d}{1-x} = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x}$$

Rappel Deux polynômes sont égaux si les coefficients qui se trouvent devant les x qui ont même puissance sont égaux.

Ce qui aboutit au système suivant:

$$\begin{cases} -a = 1 & \Rightarrow a = -1 \\ a-b = -6 & \Rightarrow -1-b = -6 \Rightarrow -b = -6+1 \Rightarrow -b = -5 \Rightarrow b = 5 \\ b-c = 1 & \Rightarrow 5-c = 1 \Rightarrow -c = 1-5 \Rightarrow -c = -4 \Rightarrow c = 4 \\ c+d = 0 & \Rightarrow 4+d = 0 \Rightarrow d = -4 \end{cases}$$

Donc $f(x) = -x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x}$

Rappel $\begin{array}{l} A \mid B \\ R \mid Q \end{array} \Leftrightarrow A = B \times Q + R$

② Méthode de division de polynômes

Divisons $x^3 - 6x^2 + x$ par $1-x$ pour trouver a, b, c, d

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + x & 1-x \\ -(-x^2 + x^3) & -x^2 + 5x + 4 \\ \hline -5x^2 + x & \\ -(-5x^2 + 5x^3) & \\ \hline -4x & \\ -(-4x + 4) & \\ \hline -4 & \end{array}$$

On a donc $x^3 - 6x^2 + x = (1-x)(-x^2 + 5x + 4) - 4$

Ce qui donne $\frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x} = -x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x}$

On retrouve le même résultat qu'avec la méthode ①

Par conséquent $I = \int_0^{1/2} f(x) dx = \int_0^{1/2} \left(-x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 4x + 4 \ln|1-x| \right]_0^{1/2}$

$$I = \left[-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \ln\left|1-\frac{1}{2}\right| \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{5}{2} \times 0^2 + 4 \times 0 + 4 \ln|1-0| \right]$$

$$I = -\frac{1/8}{3} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{2} + 4 \ln\left|\frac{1}{2}\right| - 0 = -\frac{1}{24} + \frac{5}{8} + \frac{4}{2} + 4(\ln 1 - \ln 2)$$

$$I = -\frac{1}{24} + \frac{15}{24} + \frac{48}{24} - 4 \ln 2 = \frac{62}{24} - 4 \ln 2$$

$$I = \frac{31}{12} - 4 \ln 2$$

Rappel $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Où F est la primitive de f !

Intégration par parties

$$\text{Soit } J = \int_0^{1/2} (3x^2 - 12x + 1) \ln(1-x) dx$$

$$u(x) = \ln(1-x)$$

$$v'(x) = 3x^2 - 12x + 1$$

$$u'(x) = \frac{-1}{1-x}$$

$$v(x) = x^3 - 6x^2 + x$$

Rappel $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$
Intégration par parties

$$J = \left[\ln(1-x) (x^3 - 6x^2 + x) \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{(x^3 - 6x^2 + x)}{1-x} dx$$

$$J = \left[\ln(1-x) (x^3 - 6x^2 + x) \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x} dx$$

$$J = \left[\ln(1-x) (x^3 - 6x^2 + x) \right]_0^{1/2} + I$$

$$J = \left[\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \right] - \left[\underbrace{\ln(1-0) (0^3 - 6 \cdot 0^2 + 0)}_0 \right] + \underbrace{\frac{31}{12} - 4 \ln 2}_I$$

$$J = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{31}{12} - 4 \ln 2$$

$$J = (\ln 1 - \ln 2) \left(\frac{1}{8} - \frac{12}{8} + \frac{4}{8}\right) + \frac{31}{12} - 4 \ln 2$$

$$J = -\ln 2 \left(-\frac{7}{8}\right) + \frac{31}{12} - 4 \ln 2$$

$$J = \frac{7}{8} \ln 2 - 4 \ln 2 + \frac{31}{12}$$

$$J = \frac{7}{8} \ln 2 - \frac{32}{8} \ln 2 + \frac{31}{12}$$

$$J = \frac{31}{12} - \frac{25}{8} \ln 2$$

Donc le calcul de J est approuvé I lors de l'intégration par parties

Intégration par parties

Rappel $\int_a^b u v' = [uv]_a^b - \int_a^b u' v$

* Calculons $I = \int_0^{\pi/3} x \sin x \, dx$ en effectuant une intégration par parties

$u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin x$ donc $v(x) = -\cos x$

$I = [x(-\cos x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} -\cos x \, dx = [-x \cos x]_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \cos x \, dx$

$I = [-x \cos x]_0^{\pi/3} + [\sin x]_0^{\pi/3} = [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi/3}$

finalement $I = -\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} - (-0 \cos 0 + \sin 0) = -\frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{-\pi + 3\sqrt{3}}{6}}}$

* Calculons $J = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (x^2 - 2x + 3) \sin(2x) \, dx$

$u(x) = x^2 - 2x + 3$ donc $u'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

$v'(x) = \sin(2x)$ donc $v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x)$

$J = [(x^2 - 2x + 3)(-\frac{1}{2}) \cos(2x)]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2(x-1)(-\frac{1}{2}) \cos(2x) \, dx$

$J = [-\frac{(x^2 - 2x + 3)}{2} \cos(2x)]_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (x-1) \cos(2x) \, dx$

On refait une seconde intégration par parties sur $K = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (x-1) \cos(2x) \, dx$

$u(x) = x-1$ d'où $u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos 2x$ d'où $v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

On obtient $K = [\frac{(x-1)}{2} \sin(2x)]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2x) \, dx$

donc $K = [\frac{(x-1)}{2} \sin(2x)]_{\pi/4}^{\pi/2} - \frac{1}{2} [-\frac{1}{2} \cos(2x)]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$K = [\frac{(x-1)}{2} \sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{4}]_{\pi/4}^{\pi/2}$

et $J = [-\frac{(x^2 - 2x + 3)}{2} \cos(2x) + \frac{(x-1)}{2} \sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{4}]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$J = [-\frac{(x^2 - 2x + 3)}{2} \cos(2x) + \frac{(x-1)}{2} \sin(2x)]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$J = [-\frac{(-2 \times \frac{\pi^2}{4} + 4 \times \frac{\pi}{2} - 3)}{2} \cos(\pi) + \frac{(\frac{\pi}{2} - 1)}{2} \sin \pi - (-\frac{2 \times \frac{\pi^2}{4} + 4 \times \frac{\pi}{4} - 3)}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{4} - 1)}{2} \sin \frac{\pi}{2}]$

$J = -\frac{(-\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 3)}{2} - \frac{\frac{\pi}{4} - 1}{2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{4\pi}{8} + \frac{10}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{4}{8} = \underline{\underline{\frac{\pi^2 - 5\pi + 14}{8}}}$

Integration par parties

Rappel $\int_a^b u v' = [uv]_a^b - \int_a^b u' v$

* Calculons $I = \int_{1/4}^{1/2} (-3x+7) e^{4x} dx$

$u(x) = -3x+7$

$u'(x) = -3$

On choisit de dériver le polynôme $-3x+7$

$v'(x) = e^{4x}$

$v(x) = \frac{e^{4x}}{4}$

donc $I = \left[(-3x+7) \frac{e^{4x}}{4} \right]_{1/4}^{1/2} - \int_{1/4}^{1/2} -\frac{3}{4} e^{4x} dx$

$I = \left[(-3x+7) \frac{e^{4x}}{4} \right]_{1/4}^{1/2} + \frac{3}{4} \int_{1/4}^{1/2} e^{4x} dx$

$I = \left[(-3x+7) \frac{e^{4x}}{4} \right]_{1/4}^{1/2} + \frac{3}{4} \left[\frac{e^{4x}}{4} \right]_{1/4}^{1/2}$

$I = \left[(-3x+7) \frac{e^{4x}}{4} + \frac{3}{16} e^{4x} \right]_{1/4}^{1/2} = \left[\frac{e^{4x}}{4} \left(-3x+7+\frac{3}{4} \right) \right]_{1/4}^{1/2}$

$I = \left[\frac{e^{4x}}{4} \left(-3x+\frac{28}{4}+\frac{3}{4} \right) \right]_{1/4}^{1/2} = \left[\frac{e^{4x}}{4} \left(-\frac{12x+31}{4} \right) \right]_{1/4}^{1/2}$

$I = \left[\frac{e^{4x}}{16} (-12x+31) \right]_{1/4}^{1/2} = \frac{e^{4x}}{16} \left(-\frac{12}{2}+31 \right) - \frac{e^{4x}}{16} \left(-\frac{12}{4}+31 \right)$

Enfinement $I = \frac{e^2 \times 25}{16} - \frac{e \times 28}{16} = e \left(\frac{25e-28}{16} \right)$

Rappel $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

* Calculons $J = \int_{1/5}^1 (8x-3) \ln(5x) dx$

$u(x) = \ln(5x)$

$u'(x) = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 8x-3$

$v(x) = \frac{8x^2-3x}{2} = 4x^2-3x$

Cette fois, on dérive la fonction $\ln(5x)$!

$J = \left[\ln(5x) (4x^2-3x) \right]_{1/5}^1 - \int_{1/5}^1 \frac{1}{x} (4x^2-3x) dx$

$J = \left[\ln(5x) (4x^2-3x) \right]_{1/5}^1 - \int_{1/5}^1 (4x-3) dx$

$J = \left[\ln(5x) (4x^2-3x) \right]_{1/5}^1 - \left[2x^2-3x \right]_{1/5}^1$

$J = \left[\ln(5x) (4x^2-3x) \right]_{1/5}^1 - \left[2x^2-3x \right]_{1/5}^1$

$J = \left[\ln(5x) (4x^2-3x) - 2x^2+3x \right]_{1/5}^1$

$J = \ln 5 (4-3) - 2+3 - \ln\left(\frac{5}{5}\right) \left(4 \times \frac{1^2}{5} - 3 \times \frac{1}{5} \right) + 2 \times \left(\frac{1}{5} \right)^2 + 3 \times \frac{1}{5}$

$J = \ln 5 + 1 - 2 + 3 - \ln 1 \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \right) + \frac{2}{25} + \frac{3}{5} = \ln 5 + \frac{25}{25} + \frac{2}{25} + \frac{15}{25}$

Enfinement $J = \ln 5 + \frac{42}{25}$

Integration par parties

$$I = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \cos^2 x \, dx$$

$$J = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \sin^2 x \, dx$$

Calculons I et J de 2 manières différentes

① Méthode on calcule $I+J$ et ensuite $I-J$ puis on résout le système de 2 équations à 2 inconnues obtenue

$$I+J = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \cos^2 x \, dx + \int_0^{\pi/4} (2x+1) \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} ((2x+1) \cos^2 x + (2x+1) \sin^2 x) \, dx$$

$$I+J = \int_0^{\pi/4} (2x+1) (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \, dx = \left[x^2 + x \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - 0$$

Rappel $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $I+J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16}$

$$I-J = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \cos^2 x \, dx - \int_0^{\pi/4} (2x+1) \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} ((2x+1) \cos^2 x - (2x+1) \sin^2 x) \, dx$$

$$I-J = \int_0^{\pi/4} (2x+1) (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \cos(2x) \, dx$$

Rappel $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$u(x) = 2x+1$

$u'(x) = 2$

$\sin a = b \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$v'(x) = \cos(2x)$

$v(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$

$$I-J = \left[(2x+1) \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sin(2x) \, dx = \left[\frac{(2x+1) \sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/4} + \left[\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$I-J = \left[\frac{(2x+1) \sin(2x) + \cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$I-J = \frac{(2 \cdot \frac{\pi}{4} + 1) \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)}{2} - \frac{(2 \cdot 0 + 1) \sin(2 \cdot 0) + \cos(2 \cdot 0)}{2}$$

$$I-J = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\cos(0)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + 1 + 0}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

On obtient donc le système suivant:

$$\begin{cases} I+J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16} \\ I-J = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Pour calculer I, on additionne les 2 équations ce qui donne

$$2I = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16} + \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi^2 + 8\pi}{16} \quad \text{d'où} \quad I = \frac{\pi^2 + 8\pi}{16} = \frac{\pi^2 + 8\pi}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 + 8\pi}{32}$$

Pour calculer J, on soustrait les 2 équations ce qui donne

$$2J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2 + 4\pi - 4\pi}{16} = \frac{\pi^2}{16} \quad \text{d'où} \quad J = \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{32}$$

Intégration par parties

② Méthode On calcule I et J individuellement à l'aide d'intégrations par parties

Calculons I $I = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \cos^2 x \, dx$

Rappel

$$\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$1 = \cos^2 u + \sin^2 u$$

$$I = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \left(\frac{\cos(2x) + 1}{2} \right) dx$$

Somme

$$\cos(2u) + 1 = 2\cos^2 u \quad \cos^2 u = \frac{\cos(2u) + 1}{2}$$

Différence $1 - \cos(2u) = 2\sin^2 u \quad \sin^2 u = \frac{1 - \cos(2u)}{2}$

$$u(x) = 2x+1 \quad u'(x) = 2$$

$$v'(x) = \frac{1}{2} (\cos 2x + 1) \quad V(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2} + x \right)$$

$$I = \left[(2x+1) \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2} + x \right) \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2} + x \right) dx$$

$$I = \left[\frac{(2x+1)}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2} + x \right) \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin(2x)}{2} + x \right) dx$$

$$I = \left[\frac{(2x+1)}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2} + x \right) \right]_0^{\pi/4} - \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(2x)}{2} \right) + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$I = \left[\frac{(2x+1)}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2} + x \right) + \frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left[(2x+1) \left(\frac{\sin(2x)}{2} + x \right) + \frac{1}{2} \cos(2x) - x^2 \right]_0^{\pi/4}$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{4} + 1 \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} \right] - \frac{1}{2} \left[(2 \times 0 + 1) \left(\frac{\sin(2 \times 0)}{2} + 0 \right) + \frac{1}{2} \cos(2 \times 0) - 0^2 \right]$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 0 - \frac{\pi^2}{16} \right] - \frac{1}{2} \left[1 \times 0 + \frac{1}{2} \right]$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} \right] - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4} = \frac{2\pi^2 - \pi^2 + 8\pi}{32} = \frac{\pi^2 + 8\pi}{32}$$

Calculons J $J = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} (2x+1) \frac{(1 - \cos(2x))}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (2x+1)(1 - \cos(2x)) dx$

$$u(x) = 2x+1 \quad u'(x) = 2$$

$$v'(x) = 1 - \cos(2x) \quad V(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$J = \frac{1}{2} \left[(2x+1) \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \right]_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) dx$$

$$J = \frac{1}{2} \left[(2x+1) \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) dx$$

$$J = \frac{1}{2} \left[(2x+1) \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2x)}{2} \right) \right]_0^{\pi/4}$$

$$J = \frac{1}{2} \left[(2x+1) \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) - x^2 - \frac{1}{4} \cos(2x) \right]_0^{\pi/4}$$

$$J = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\pi}{4} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)}{2} \right) - \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \right] - \frac{1}{2} \left[(2 \times 0 + 1) \left(0 - \frac{\sin(2 \times 0)}{2} \right) - 0^2 - \frac{1}{4} \cos(2 \times 0) \right]$$

$$J = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi^2}{16} - 0 \right] - \frac{1}{2} \left[0 - \frac{1}{4} \right]$$

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^2 - \pi^2}{16} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$$

Intégration par parties

Soit $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^3} dx$ et $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

Calculons A et B $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln|1+e^x| \right]_0^1 = \ln|1+e| - \ln|1+1| = \ln \left| \frac{1+e}{2} \right|$

Car $\frac{e^x}{1+e^x}$ est de la forme $\frac{u^1}{u}$ qui a pour primitive $\ln|u|$

$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \left[\frac{-1}{1+e^x} \right]_0^1 = \frac{-1}{1+e} - \left(\frac{-1}{1+1} \right) = -\frac{1}{1+e} + \frac{1}{2} = \frac{-2+1+e}{2(1+e)} = \frac{e-1}{2(e+1)}$

Car $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ est de la forme $\frac{-u^1}{u^2}$ qui a pour primitive $\frac{1}{u}$

Soit $\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{a+b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$? a, b, c pour que cette égalité soit vraie

(*) $\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{a(1+x) + b(1+x) + c}{(1+x)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{a(1+2x+x^2) + b(1+x) + c}{(1+x)^2}$

(*) $\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{(1+x)^2}$ Ce qui donne le système suivant:

$$\begin{cases} a+b=0 & \Rightarrow 1+b=0 \Rightarrow b=-1 \\ 2a+b+c=0 & \Rightarrow 2-1+c=0 \Rightarrow 1+c=0 \Rightarrow c=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

Donc $\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$ En remplaçant x par e^x on obtient

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = \frac{1-e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

On a donc $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

$I = \left[x \right]_0^1 - A - B = 1 - 0 - \ln \left| \frac{1+e}{2} \right| - \frac{e-1}{2(e+1)}$

$I = \frac{2(e+1) - e + 1}{2(e+1)} - \ln \left| \frac{1+e}{2} \right| = \frac{2e+2-e+1}{2(e+1)} - \ln \left| \frac{1+e}{2} \right| = \frac{e+3}{2(e+1)} - \ln \left| \frac{1+e}{2} \right|$

Calculons maintenant $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^3} dx$ à l'aide d'une intégration par parties

$u(x) = x$ $u'(x) = 1$ $v'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3} = e^x (1+e^x)^{-3}$ $v(x) = \frac{(1+e^x)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(1+e^x)^2}$

Car $v'(x)$ est de la forme $u' u^{n+1}$ qui a pour primitive $\frac{u^n}{n}$

Donc $J = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2(1+e^x)^2} dx = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

$J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(1+e)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e+3}{2(e+1)} - \ln \left| \frac{1+e}{2} \right| - \frac{1}{(1+e)^2} \right)$

$J = \frac{1}{2} \left(\frac{(e+3)e+1}{2(e+1)^2} - \ln \left| \frac{1+e}{2} \right| \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2+e+3e+3-2}{2(e+1)^2} - \ln \left| \frac{1+e}{2} \right| \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2+4e+1}{2(e+1)^2} - \ln \left| \frac{1+e}{2} \right| \right)$