

Suites numériques

Convergence de suites

Exercice 1 [02247] [\[correction\]](#)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.

Montrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n < v_n$.

Exercice 2 [02248] [\[correction\]](#)

Montrer que $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, (u_n) est stationnaire.

Exercice 3 [02249] [\[correction\]](#)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ u_n + v_n \rightarrow a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \rightarrow a$ et $v_n \rightarrow b$.

Exercice 4 [02250] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 5 [02251] [\[correction\]](#)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Etudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(u_n, v_n)$$

Exercice 6 [02252] [\[correction\]](#)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \rightarrow 0$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 7 [02253] [\[correction\]](#)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$0 \leq u_n \leq 1, 0 \leq v_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \rightarrow 1$$

Que dire de ces suites ?

Exercice 8 [03497] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 0$$

Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 9 [03184] [\[correction\]](#)

Soient K un réel strictement supérieur à 1 et (ε_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit (u_n) une suite de réels de $[0, 1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$$

La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ?

Calcul de limites

Exercice 10 [02254] [\[correction\]](#)

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} & \text{b) } u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \\ \text{c) } u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} & \text{d) } u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \end{array}$$

Exercice 11 [02255] [\[correction\]](#)

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \text{b) } u_n = \sqrt[n]{n^2} \\ \text{c) } u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} & \text{d) } u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \end{array}$$

Exercice 12 [02256] [correction]

Déterminer par comparaison, la limite des suites (u_n) suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \ u_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}} & \text{b)} \ u_n = \frac{n!}{n^n} \\ \text{c)} \ u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} & \text{d)} \ u_n = \frac{e^n}{n^n} \\ \text{e)} \ u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n} & \end{array}$$

Exercice 13 [02257] [correction]

Déterminer les limites des sommes suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \ S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} & \text{b)} \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\ \text{c)} \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} & \text{d)} \ S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \\ \text{e)} \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} & \text{f)} \ S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \\ \text{g)} \ S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k! & \end{array}$$

Exercice 14 [02258] [correction]

Comparer

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 15 [02259] [correction]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$.

- Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \rightarrow 0$.
- Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \rightarrow +\infty$.
- Montrer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 16 [02260] [correction]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$$

a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \rightarrow 0$.

b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \rightarrow +\infty$.

c) Observer que dans le cas $\ell = 1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 17 [02261] [correction]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

a) Etablir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{dx}{x}$$

En déduire la limite de (S_n) .

b) Etablir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n) .

Exercice 18 [02263] [correction]

Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}$$

Exercice 19 [02264] [correction]

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \binom{n+p}{n}^{-1} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$$

b) Montrer par récurrence

$$S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1})$$

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.

d) En déduire $\lim S_n$ en fonction de p .

Exercice 20 [03039] [correction]

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Existence et calcul de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k})$$

Exercice 21 [03196] [correction]

Etudier la convergence de deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{u_n} + e^{v_n}) = 2$$

Exercice 22 [02262] [correction]

Soit $a \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k}$$

Montrer que

$$\sin \left(\frac{a}{2^n} \right) P_n = \frac{1}{2^n} \sin(a)$$

et déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

Exercice 23 [00298] [correction]

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $u_n = \sqrt[n]{n}$

b) $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

c) $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

d) $u_n = n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1}\right)$

e) $u_n = \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right)\right)^n$

f) $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$

g) $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4}}{3}\right)^n$

h) $u_n = \left(\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n}\right)^{n^2}$

Exercice 24 [00302] [correction]

Nature de la suite de terme général

$$u_n = \cos(\pi n^2 \ln(1 - 1/n))$$

Exercice 25 [02781] [correction]

Etudier la convergence de la suite $(\lfloor a^n \rfloor^{1/n})$, où $a > 0$.

Exercice 26 [00304] [correction]

Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que $u_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 27 [00320] [correction]

Soient $\alpha > 0$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$$

a) Montrer que si $\alpha > 1$ alors $u_n \rightarrow 0$ tandis que si $\alpha < 1$, $u_n \rightarrow +\infty$.

b) Montrer que si $\alpha = 1$, la suite est monotone et convergente.

c) Toujours dans le cas $\alpha = 1$ et en exploitant l'encadrement $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$ valable pour tout $x \in [0, 1[$, établir $u_n \rightarrow \ln 2$.

Exercice 28 [00321] [correction]

a) Etablir que pour tout $x \geq 0$ on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$$

b) En déduire la limite de

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Exercice 29 [00319] [correction]

a) Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé. Montrer que la suite (u_n) converge. Sa limite sera notée ℓ (on ne demande pas ici de la calculer)

b) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 et telle que $f(0) = 0$. Soit

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Montrer que (v_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de ℓ .

c) Calculer ℓ en utilisant $f(x) = \ln(1+x)$.

d) Si f de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{C} est continue et vérifie $f(0) = 0$, montrer qu'il peut y avoir divergence de la suite (v_n) .

Limites des suites monotones

Exercice 30 [02265] [correction]

Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ . On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

a) Montrer que (v_n) est croissante.

b) Etablir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.

c) En déduire que $v_n \rightarrow \ell$.

Exercice 31 [02266] [correction]

Soit (u_n) une suite réelle convergente. Etudier la limite de la suite $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$.

Exercice 32 [02267] [correction]

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose

$$v_n = \sup_{p \geq n} u_p \text{ et } w_n = \inf_{p \geq n} u_p$$

Montrer que les suites (v_n) et (w_n) possèdent chacune une limite dans \mathbb{R} et comparer celles-ci.

Exercice 33 [02268] [correction]

[Somme harmonique]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$.

Exercice 34 [02269] [correction]

Soit (H_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

a) Montrer que $H_n \rightarrow +\infty$.

b) Soit (u_n) une suite telle que $n(u_{n+1} - u_n) \rightarrow 1$. Montrer que $u_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 35 [02270] [correction]

On pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$

a) Exprimer u_n à l'aide de nombres factoriels.

b) Montrer que la suite (u_n) converge.

c) On pose

$$v_n = (n+1)u_n^2$$

Montrer que la suite (v_n) converge. En déduire la limite de la suite (u_n)

d) Simplifier

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

et comparer ce produit à u_n^2 .

e) En déduire que la limite C de la suite (v_n) est strictement positive.

Exercice 36 [00300] [correction]

Soient $a > 0$ et

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)$$

a) Montrer que si $a \geq 1$ alors $u_n \rightarrow +\infty$.

b) On suppose $0 < a < 1$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On pourra exploiter la majoration $1+x \leq e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Suites adjacentes

Exercice 37 [02271] [correction]

Soient $\theta \in]0, \pi/2[$ et

$$u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}, v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 38 [00325] [correction]

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Exercice 39 [02272] [correction]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } S'_n = S_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

On peut montrer que leur limite commune est $\pi^2/6$, mais c'est une autre histoire...

Exercice 40 [02273] [correction]

[Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz]

Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$

Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 41 [02274] [correction]

[Irrationalité du nombre de Néper]

Soient

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!} = a_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.

On admet que leur limite commune est e . On désire montrer que $e \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $a_q < e < b_q$ puis obtenir une absurdité.

Exercice 42 [02275] [correction]

[Moyenne arithmético-géométrique]

a) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir :

$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$

b) On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

c) Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.

d) Calculer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.

e) Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 43 [00324] [correction]

[Irrationalité de e]

On pose pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) En exploitant l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $x \mapsto e^x$, montrer que $u_n \rightarrow e$.

c) On suppose que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. En considérant $q.q!u_q$ et $q.q!v_q$ obtenir une absurdité.

Suites extraites

Exercice 44 [02276] [correction]

On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge.

Montrer que (u_n) converge.

Exercice 45 [02277] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) une suite complexe telle que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 46 [02278] [\[correction\]](#)

Justifier que la suite de terme général $\cos(n)$ diverge.

Exercice 47 [00327] [\[correction\]](#)

Montrer que la suite de terme général $\sin(n)$ diverge.

Exercice 48 [02279] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$$

Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 49 [03234] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant

$$u_{n+1} - u_n \rightarrow 0 \text{ et } u_n \rightarrow +\infty$$

Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant

$$u_{\varphi(n)} - n \rightarrow 0$$

Limite de suites de solutions d'une équation

Exercice 50 [02290] [\[correction\]](#)

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

- Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n .
- Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 51 [02288] [\[correction\]](#)

Montrer que l'équation $x e^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans \mathbb{R}^+ .

Etudier la limite de (x_n) .

Exercice 52 [02291] [\[correction\]](#)

Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

- Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n , et que $x_n \geq 1$.
- Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.

Exercice 53 [02292] [\[correction\]](#)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$E_n : x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

- Montrer que l'équation E_n possède une unique solution x_n dans \mathbb{R}^+ et que $x_n \in [1/2, 1]$
- Montrer que (x_n) converge.
- Déterminer la limite de (x_n) .

Exercice 54 [00314] [\[correction\]](#)

Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

possède une unique racine x_n dans $]0, +\infty[$. Déterminer $\lim x_n$.

Exercice 55 [00315] [\[correction\]](#)

Montrer que la relation $n u_n^{n+1} - (n+1) u_n^n = 1$ définit une suite positive (u_n) unique.

Etudier sa convergence et préciser sa limite.

Expression du terme général d'une suite récurrente

Exercice 56 [02293] [\[correction\]](#)

Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

- $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$
- $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 57 [02294] [\[correction\]](#)

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i \cdot y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 58 [02295] [\[correction\]](#)

Soit (z_n) une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n)$$

Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0 .

Exercice 59 [02296] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

- Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
- Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
- Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 60 [02297] [\[correction\]](#)

Soient $\rho > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$.

On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = \rho e^{i\theta}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

- Exprimer z_n sous forme d'un produit.

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$.

Exercice 61 [03048] [\[correction\]](#)

Etudier la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

Exercice 62 [02056] [\[correction\]](#)

Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n$$

Donner l'expression du terme général u_n de cette suite.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2**Exercice 63** [02298] [\[correction\]](#)

Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$$

Exercice 64 [02299] [\[correction\]](#)

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes :

- $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
- $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
- $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 65 [02300] [\[correction\]](#)

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2 \cos \theta u_{n+1} + u_n = 0$$

Exercice 66 [02683] [\[correction\]](#)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \rightarrow \mathbb{R}^{+\star}$ vérifiant

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

Etude de suites récurrentes**Exercice 67** [02304] [\[correction\]](#)

Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$$

Exercice 68 [02305] [\[correction\]](#)Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$$

Exercice 69 [02303] [\[correction\]](#)Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Exercice 70 [02306] [\[correction\]](#)Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \geq 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$$

Exercice 71 [02307] [\[correction\]](#)Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

Exercice 72 [02308] [\[correction\]](#)Etudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$$

Exercice 73 [02309] [\[correction\]](#)Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-2, 2] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-2, 2]$$

b) Quelles sont les limites finies possibles pour (u_n) ?c) Montrer que $(|u_n - 1|)$ converge puis que $\lim |u_n - 1| = 0$. En déduire $\lim u_n$.**Exercice 74** [02310] [\[correction\]](#)Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |a| < 1$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$$

Montrer que (u_n) est bien définie et $|u_n| < 1$. Etudier la limite de (u_n) .**Exercice 75** [02312] [\[correction\]](#)Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

a) Etudier la convergence de la suite (u_n) .b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

Calculer v_{n+1} en fonction de v_n , puis v_n en fonction de v_0 et n .c) Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a

$$|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0 \cdot v_0^{2^n}$$

Ainsi, u_n réalise une approximation de \sqrt{a} à la précision $2u_0 \cdot v_0^{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.On peut alors par des calculs élémentaires, déterminer une approximation de \sqrt{a} .**Exercice 76** [02313] [\[correction\]](#)On considère l'équation $\ln x + x = 0$ d'inconnue $x > 0$.a) Montrer que l'équation possède une unique solution α .b) Former, par l'algorithme de Newton, une suite récurrente réelle (u_n) convergeant vers α .**Exercice 77** [02311] [\[correction\]](#)Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a > 0, u_1 = b > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1}^2$$

A quelle condition (u_n) converge ?

Exercice 78 [02301] [correction]

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On définit une suite (u_n) par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}$$

a) Déterminer la limite de (u_n) .
 b) Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 79 [00094] [correction]

Etablir

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Exercice 80 [03229] [correction]

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1/2, 1]$$

Soit (v_n) la suite déterminée par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1} v_n}$$

Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 81 [00328] [correction]

Etudier la suite définie par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} u_n^2$$

Exercice 82 [00330] [correction]

Soient $a > 0$,

$$u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, u_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}},$$

Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 83 [00331] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 1}{3}$$

et (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Justifier que l'équation $f(x) = x$ possède trois racines réelles (qu'on n'exprimera pas).
 b) Etudier le signe de $f(x) - x$ ainsi que la monotonie de f .
 c) Préciser le comportement de (u_n) en discutant selon la valeur de u_0 .

Exercice 84 [00332] [correction]

Soient

$$f : x \mapsto \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$$

(avec $a > 0$) et (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Etudier les variations de f , le signe de $f(x) - x$ et en déduire le comportement de (u_n) .

Exercice 85 [00333] [correction]

Soient $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

Montrer que (u_n) est monotone de limite nulle. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \text{ et } \prod_{k=0}^n (1 - u_k)$$

Exercice 86 [00334] [correction]

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| < 1$$

a) Montrer que f admet un point fixe unique α .
 b) Montrer, pour tout $u \in [a, b]$, la convergence vers α de la suite (u_n) définie par

$$u_0 = u \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Exercice 87 [00335] [correction]

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction 1 lipschitzienne et $\alpha \in [a, b]$.

On considère la suite définie par

$$u_0 = \alpha \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}$$

Montrer que (u_n) converge vers un point fixe de f .

Exercice 88 [00329] [correction]

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in]0, 4[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$$

- a) Montrer que (u_n) est bornée. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?
- b) Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) est soit stationnaire égale à 0, soit stationnaire égale à 3.
- c) En posant $u_0 = 4 \sin^2 \alpha$, déterminer les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire.

Exercice 89 [00336] [correction]

Soient $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

On considère la suite complexe (z_n) définie par

$$z_0 = \rho e^{i\theta} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

- a) Exprimer (z_n) à l'aide d'un produit.
- b) Déterminer la limite de (z_n) .

Exercice 90 [00338] [correction]

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

Montrer que (u_n) converge. On pourra commencer par étudier la monotonie de $v_n = \max(u_{n+1}, u_n)$.

Exercice 91 [00337] [correction]

Soient (u_n) et (v_n) les suites récurrentes réelles définies par :

$$u_0, v_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 92 [00326] [correction]

Pour $\alpha \in]0, \pi/2]$, on étudie les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = \cos \alpha \\ v_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$$

b) Etudier $\sin \frac{\alpha}{2^n} v_n$ et en déduire les limites de (u_n) et (v_n) .

Exercice 93 [02783] [correction]

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout $n > 0$,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$$

- a) Ici $x_n = a$ pour tout n , où $a > 0$. Etudier la convergence de (y_n) .
- b) Même question dans le cas où $x_n = ab^{2^n}$ pour tout n , avec $b > 0$.
- c) Montrer que (y_n) converge si, et seulement si, la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Exercice 94 [03165] [correction]

Soient (a_n) une suite réelle positive, bornée et (u_n) la suite récurrente définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge.

Exercice 95 [00844] [correction]

Montrer que la suite réelle (x_n) définie par $x_0 \in [a, b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$$

où f est 1-lipschitzienne de $[a, b]$ dans $[a, b]$, converge vers un point fixe de f .

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Posons $m = (\ell + \ell')/2$. On a $u_n \rightarrow \ell < m$. Pour $\varepsilon = m - \ell > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et donc

$$\forall n \geq n_0, u_n < m$$

De façon symétrique, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, v_n > m$$

et alors pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$ on a

$$u_n < m < v_n$$

Exercice 2 : [énoncé]

Si (u_n) est stationnaire, il est clair que cette suite converge.

Inversement, supposons que (u_n) converge et notons ℓ sa limite.

Montrons $\ell \in \mathbb{Z}$. Par l'absurde, si $\ell \notin \mathbb{Z}$ alors $E(\ell) < \ell < E(\ell) + 1$ donc à partir d'un certain rang $E(\ell) < u_n < E(\ell) + 1$. Or $u_n \in \mathbb{Z}$. Absurde. Ainsi $\ell \in \mathbb{Z}$.

Puisque $u_n \rightarrow \ell$ et $\ell - 1 < \ell < \ell + 1$, à partir d'un certain rang $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Or $u_n \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ donc $u_n = \ell$. Finalement (u_n) est stationnaire égale à ℓ .

Exercice 3 : [énoncé]

On a l'encadrement

$$0 \leq a - u_n \leq (a - u_n) + (b - v_n) = (a + b) - (u_n + v_n) \rightarrow 0$$

donc $u_n \rightarrow a$ puis

$$v_n = (u_n + v_n) - u_n \rightarrow (a + b) - a = b$$

Exercice 4 : [énoncé]

Supposons $u_n + v_n \rightarrow \ell$ et $u_n - v_n \rightarrow \ell'$.

$u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) + \frac{1}{2}(u_n - v_n) \rightarrow \frac{\ell + \ell'}{2}$ et de même $v_n \rightarrow \frac{\ell - \ell'}{2}$.

Exercice 5 : [énoncé]

On a

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}((a + b) + |a - b|)$$

donc

$$\max(u_n, v_n) = \frac{1}{2}((u_n + v_n) + |u_n - v_n|) \rightarrow \max(\lim u_n, \lim v_n)$$

Exercice 6 : [énoncé]

On a

$$0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 \leq 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \rightarrow 0$$

Ainsi $u_n + v_n \rightarrow 0$ puis

$$u_n v_n = (u_n + v_n)^2 - (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \rightarrow 0$$

et donc

$$u_n^2 + v_n^2 = 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) - (u_n + v_n)^2 \rightarrow 0$$

qui permet de conclure $u_n \rightarrow 0$ et $v_n \rightarrow 0$.

Exercice 7 : [énoncé]

On a

$$u_n v_n \leq u_n, v_n \leq 1$$

Par le théorème d'encadrement on obtient

$$\lim u_n = \lim v_n = 1$$

Exercice 8 : [énoncé]

Puisque $|u_{n+1}/u_n| \rightarrow 0 < 1/2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N, |u_{n+1}/u_n| \leq 1/2$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq N, |u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n|$$

On a alors par récurrence

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-N}} |u_N|$$

et donc par comparaison $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 9 : [énoncé]

Montrons que la suite (u_n) converge vers 0 par l'epsilontique...
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (ε_n) converge vers 0, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$\forall n \geq N, 0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$$

et alors pour tout $n \geq N$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon}{K}$$

On en déduit

$$0 \leq u_{n+2} \leq \frac{u_n}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K}$$

et par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{K^i}$$

La suite (u_n) est majorée par 1 et on peut encore écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K} \frac{1 - (1/K)^p}{1 - 1/K} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K-1}$$

Pour p assez grand, on a $1/K^p \leq \varepsilon$ et alors

$$0 \leq u_{n+p} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{K-1} = \lambda \varepsilon$$

avec λ une constante strictement positive ce qui permet de conclure.

Exercice 10 : [énoncé]

a)

$$u_n = \frac{1 - (-2/3)^n}{1 + (-2/3)^n} \rightarrow 1$$

b)

$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1$$

c)

$$u_n = \frac{1 - \sqrt{1 + 1/n^2}}{1 + \sqrt{1 - 1/n^2}} \rightarrow 0$$

d)

$$u_n = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Exercice 11 : [énoncé]

a) $u_n = e^{n(\ln(1+1/n))}$ or $n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{1/n} \ln(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 1$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Par suite $u_n \rightarrow e$.

$$b) u_n = e^{\frac{2}{n} \ln n} \rightarrow 1$$

$$c) \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(\sin \frac{1}{n})}$$

$$d) \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{2}{n+1})}$$

$$e) 1 \leq u_n \leq \sqrt[3]{3} = e^{\frac{1}{n} \ln 3} \rightarrow 1$$

Exercice 12 : [énoncé]

$$a) |u_n| \leq \frac{1}{n-1} \rightarrow 0$$

$$b) 0 \leq u_n \leq \frac{1.2 \dots n}{n \cdot n \dots n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$c) \frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n-1}$$

$$d) 0 \leq u_n \leq \frac{e}{1} \frac{e}{2} \dots 1 \times \dots \times 1 \times \frac{e}{n} \rightarrow 0$$

$$e) 1 \leq u_n \leq \sqrt[3]{3} = e^{\frac{1}{n} \ln 3} \rightarrow 1$$

Exercice 13 : [énoncé]

$$a) S_n \geq \sum_{k=1}^n 1 = n \rightarrow +\infty$$

$$b) S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

$$c) 0 \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$$

$$d) 0 \leq S_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \rightarrow 0$$

$$e) \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1}$$

$$f) \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

par le théorème des gendarmes : $S_n \rightarrow 1$.

g) $S_n = n! - (n-1)! + (n-2)! + \dots + (-1)^n$. Par regroupement de termes.

Si n est pair alors $S_n \geq n! - (n-1)!$ et si n est impair $S_n \geq n! - (n-1)! - 1$.

Puisque $n! - (n-1)! = (n-1).(n-1)! \rightarrow +\infty$, on a $S_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 14 : [énoncé]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 1^m$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} \rightarrow e^{-1}$$

Exercice 15 : [énoncé]

a) Soit $\rho = \frac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$.

Comme $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell < \rho$, il existe un rang N au delà duquel $\sqrt[n]{u_n} \leq \rho$ donc $0 < u_n \leq \rho^n$. On a alors $u_n \rightarrow 0$.

b) Même démarche mais par minoration.

c) $u_n = n$, $u_n = 1$ et $u_n = 1/n$ sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

Exercice 16 : [énoncé]

a) Soit $\rho = \frac{\ell+1}{2}$ de sorte que $\ell < \rho < 1$.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell < \rho$, il existe un rang N au delà duquel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \rho$$

On a alors

$$0 \leq u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{N+1}}{u_N} u_N \leq \rho^{n-N} u_N \rightarrow 0$$

donc $u_n \rightarrow 0$.

On peut aussi raisonner en observant que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang, donc convergente et que sa seule limite possible est nulle.

b) Même démarche mais par minoration ou par croissance.

c) $u_n = n$, $u_n = 1$ et $u_n = 1/n$ sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

Exercice 17 : [énoncé]

a) On a

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \int_p^{p+1} \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}$$

car la fonction décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$ est majorée par $\frac{1}{p}$ sur $[p, p+1]$.

Par un argument semblable

$$\int_{p-1}^p \frac{dx}{x} \geq \int_{p-1}^p \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}$$

Pour $n \geq 1$,

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x}$$

donne en sommant

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x}$$

Or

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2$$

et

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln 2$$

donc $S_n \rightarrow \ln 2$.

b) On a

$$S'_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

donc

$$S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = S_n$$

Par suite $S'_{2n} \rightarrow \ln 2$. De plus $S'_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2$ donc

$$S'_n \rightarrow \ln 2$$

Exercice 18 : [énoncé]

On a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} + \frac{1}{n} + 1$$

Or pour $k \in \{2, \dots, n-2\}$,

$$\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \rightarrow 0$$

puis $u_n \rightarrow 2$.

Exercice 19 : [énoncé]

a)

$$\binom{n+p+2}{n+2} = \frac{n+p+2}{n+2} \binom{n+p+1}{n+1}$$

d'où la relation.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Pour $n = 1$:

$$S_1 = \frac{1}{\binom{p+1}{1}} \text{ et } \frac{1}{p-1}(1 - (p+2)\frac{2}{(p+2)(p+1)}) = \frac{1}{p+1}$$

ok

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \stackrel{HR}{=} \frac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \frac{1}{p-1}(1 - (n+2)u_{n+1}) = \frac{1}{p-1}(1 - (n+p+2)u_{n+2})$$

Récurrence établie.

c)

$$0 \leq v_n = \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} = \frac{n!p!}{(n+p-1)!} \leq \frac{p!}{n+1} \rightarrow 0$$

d) Par opérations

$$S_n \rightarrow \frac{1}{p-1}$$

Exercice 20 : [énoncé]

On a

$$(1-z) \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = (1-z)(1+z)(1+z^2) \dots (1+z^{2^n})$$

Or $(1-z)(1+z) = 1-z^2$ donc

$$(1-z) \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = (1-z^2)(1+z^2) \dots (1+z^{2^n})$$

En répétant la manipulation

$$(1-z) \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = (1-z^{2^{n+1}})$$

Or $z^{2^{n+1}} \rightarrow 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$$

Exercice 21 : [énoncé]

Exploitons

$$S_n = e^{u_n} + e^{v_n} \rightarrow 2 \text{ et } P_n = e^{u_n} \cdot e^{v_n} = e^{u_n+v_n} \rightarrow 1$$

Les nombres e^{u_n} et e^{v_n} sont solutions de l'équation

$$(X - e^{u_n})(X - e^{v_n}) = 0 \text{ i.e. } X^2 - S_n X + P_n = 0$$

À l'ordre près, on peut exprimer e^{u_n} et e^{v_n} à partir du discriminant de cette équation. Or $S_n \rightarrow 2$ et $P_n \rightarrow 1$, le discriminant tend alors vers 0 et les deux suites tendent vers 1. On en déduit $u_n \rightarrow 0$ puis $v_n \rightarrow 0$.

Exercice 22 : [énoncé]

En exploitant la formule $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$$\sin \frac{a}{2^n} P_n = \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{a}{2} = \dots = \frac{1}{2^n} \sin(a)$$

Si $a = 0$ alors $P_n = 1 \rightarrow 1$.

Si $a \neq 0$ alors, pour n assez grand, $\sin(a/2^n) \neq 0$ et

$$P_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}$$

Puisque

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \cos(0) = 1$$

on a

$$\frac{\sin(a/2^n)}{a/2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

puis

$$P_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin \frac{a}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a)}{a}$$

car

$$2^n \sin \frac{a}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n \frac{a}{2^n} = a$$

Exercice 23 : [énoncé]

a) $u_n = \exp(\ln n/n) \rightarrow 1$.

b) $u_n = \exp(n \ln(1 + \frac{x}{n})) = \exp(x + o(1)) \rightarrow e^x$.

c) $u_n = \exp((n+2) \ln(1 - \frac{2}{n+1})) = \exp(-2 + o(1)) \rightarrow e^{-2}$.

d) $u_n = -2n^2 \sin\left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)/2\right) \sin\left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)/2\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0.$
e) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right) = 1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc
 $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(2\alpha + o(1)) \rightarrow e^{2\alpha}.$
f) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right)^{n \ln n} \rightarrow e.$
g) $\sqrt[3]{2} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln 2\right) = 1 + \frac{1}{n} \ln 2 + o(1)$, $u_n = \left(1 + \frac{\ln 24}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow \sqrt[3]{24}.$
h) Par le théorème des accroissements finis

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan n) = \frac{1}{1+c^2} \frac{1}{\arctan c}$$

avec $n \leq c \leq n+1$ donc

$$u_n = \exp\left(n^2 \frac{1}{1+c^2} \frac{1}{\arctan c}\right) \rightarrow e^{2/\pi}$$

Exercice 24 : [énoncé]

En développant $\ln(1-1/n)$

$$u_n = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + o(1)\right) = (-1)^{n+1} \sin(o(1)) \rightarrow 0$$

Exercice 25 : [énoncé]

Si $a \in]0, 1[$, la suite est constante égale à 0.

Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1.

Si $a > 1$ alors $a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n$ donne $(a^n - 1)^{1/n} < \lfloor a^n \rfloor^{1/n} \leq a$ et donc, par encadrement, la suite converge vers a .

Exercice 26 : [énoncé]

$\forall A \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} / u_n < A\}$ est fini car il contient au plus $E(A) + 1$ éléments.

Par suite il possède un plus grand élément N et alors $\forall n \geq N+1, u_n \notin E$ donc $u_n \geq A$. Ainsi $u_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 27 : [énoncé]

a) Si $\alpha > 1$ alors $0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^\alpha + 1} \rightarrow 0$ donc $u_n \rightarrow 0$.

Si $\alpha < 1$ alors $u_n \geq \frac{n}{n^\alpha + n^\alpha} = \frac{1}{2} n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$ donc $u_n \rightarrow +\infty$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > 0$ donc (u_n) est croissante. De plus $u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ donc (u_n) est majorée et par conséquent convergente.

c)

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq -\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\right) = -\ln \frac{n}{2n} = \ln 2$$

et

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right) = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2$$

donc $u_n \rightarrow \ln 2$.

Exercice 28 : [énoncé]

a) Il suffit de dresser le tableau de variation des fonctions $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ et $x \mapsto x - \ln(1+x)$.

b)

$$\ln u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

et

$$\ln u_n \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4}\right) = \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} \rightarrow \frac{1}{2}$$

donc

$$u_n \rightarrow \sqrt{e}$$

Exercice 29 : [énoncé]

a) La suite (u_n) est croissante car

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(p+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(p+1)} - \frac{1}{n+1} \geq 0$$

et $u_n \leq \frac{np}{n+1} \leq p$ donc (u_n) converge vers une limite ℓ .

b) Commençons par le cas où $f'(0) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$ on ait $|f'(x)| \leq \varepsilon$ et par l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$\forall x \in [0, \alpha], |f(x)| \leq \varepsilon |x|$$

On a alors

$$|v_n| = \sum_{k=1}^{np} \frac{\varepsilon}{n+k} \leq p\varepsilon$$

et donc $v_n \rightarrow 0$.

Pour le cas général, il suffit d'introduire $g(x) = f(x) - xf'(0)$. Puisque $g'(0) = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{np} g\left(\frac{1}{n+k}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$v_n - u_n f'(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et finalement $v_n \rightarrow \ell f'(0)$.

c) Pour $f(x) = \ln(1+x)$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) = \ln(n(p+1)+1) - \ln(n+1) \rightarrow \ln(p+1)$$

On conclut $\ell = \ln(p+1)$.

d) Pour $f(x) = \sqrt{x}$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{np}{\sqrt{(n+1)p}} \rightarrow +\infty$$

Exercice 30 : [énoncé]

a)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)} \geq 0$$

donc (v_n) est croissante.

b)

$$v_{2n} = \frac{u_1 + \dots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \dots + u_{2n}}{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}$$

c) On a $v_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et (v_n) croissante donc (v_n) converge vers un réel $\ell' \leq \ell$.

La relation précédente, passée à la limite, donne $2\ell' \geq \ell + \ell'$ ce qui permet de conclure $v_n \rightarrow \ell$.

Exercice 31 : [énoncé]

(u_n) converge donc (u_n) est bornée. La suite (v_n) est donc bien définie et elle-même bornée.

On a $v_{n+1} \leq v_n$ donc (v_n) est décroissante et donc converge.

Posons $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$.

$v_n \geq u_n$ donc à la limite $\ell' \geq \ell$.

Si $\ell' > \ell$ alors $\ell' > \frac{\ell+\ell'}{2} > \ell$.

A partir d'un certain rang $v_n > \frac{\ell+\ell'}{2}$ et $u_n < \frac{\ell+\ell'}{2}$. Impossible. Il reste $\ell' = \ell$.

Exercice 32 : [énoncé]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\{u_p/p \geq n+1\} \subset \{u_p/p \geq n\}$$

donc $v_{n+1} \leq v_n$ et $w_{n+1} \geq w_n$.

Les suites (v_n) et (w_n) sont respectivement décroissante et croissante. De plus $w_n \leq v_n$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par w_0 donc elle converge vers une limite ℓ .

De même la suite (w_n) converge vers une limite m . Enfin $w_n \leq v_n$ donne à la limite

$$m \leq \ell$$

Exercice 33 : [énoncé]

On a

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

(H_n) est croissante car $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$.

Si (H_n) converge vers ℓ alors $H_{2n} - H_n \rightarrow \ell - \ell = 0$. Ceci est impossible puisque $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

Par suite (H_n) diverge, et puisque (H_n) est croissante, (H_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 34 : [énoncé]

a) Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on a

$$\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$$

donc

$$H_n \geq \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$$

donc $H_n \rightarrow +\infty$.

b) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$n(u_{n+1} - u_n) \geq 1/2$$

On a alors

$$u_{n+1} - u_N \geq \sum_{k=N}^n u_{k+1} - u_k \geq \frac{1}{2} \sum_{k=N}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{2} (H_n - H_{N-1}) \rightarrow +\infty$$

puis $u_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 35 : [énoncé]

a)

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

b) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$$

donc (u_n) est décroissante. Or (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) converge.

c)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2$$

or $(n+2)(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 = -3n - 2 < 0$ donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$. (v_n) est décroissante et minorée par 0 donc (v_n) converge.Nécessairement $\lim u_n = 0$ car sinon $v_n = (n+1)u_n^2 \rightarrow +\infty$.

d) Par télescopage des facteurs

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

Parallèlement

$$u_n^2 = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2} \prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

e) On en déduit

$$(n+1)u_n^2 \geq \frac{(n+1)}{4n}$$

et donc $C \geq 1/4$.On peut montrer que $C = 1/\pi$ en exploitant dès la première question la formule de Stirling (si celle-ci est connue...).**Exercice 36 : [énoncé]**a) Si $a \geq 1$ alors $u_n \geq 2^n \rightarrow +\infty$ donc $u_n \rightarrow +\infty$.b) $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc (u_n) est croissante. De plus

$$u_n \leq e^a e^{a^2} \dots e^{a^n} = \exp \left(a \frac{1-a^n}{1-a} \right) \leq \exp \left(\frac{a}{1-a} \right)$$

donc (u_n) est majorée et par suite convergente.**Exercice 37 : [énoncé]**Via $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, on obtient

$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \leq u_{n+1}$$

Via $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$, on obtient

$$v_n = 2^{n+1} \frac{\tan(\theta/2^{n+1})}{1 - \tan^2(\theta/2^{n+1})} \geq v_{n+1}$$

 $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $u_n \rightarrow \theta$ et $v_n \rightarrow \theta$ d'où $v_n - u_n \rightarrow 0$.Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes de limite commune égale à θ .**Exercice 38 : [énoncé]**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 0$$

De même $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et aisément $v_n - u_n \rightarrow 0$ d'où l'adjacence de ces deux suites.Notons ℓ leur limite commune, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}$$

Exercice 39 : [énoncé]

On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

$$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \leq 0$$

et

$$S'_n - S_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Exercice 40 : [énoncé]

D'une part

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$$

D'autre part

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$$

Enfin

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \rightarrow 0$$

Les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) étant adjacentes, elles convergent vers une même limite.

Par conséquent (S_n) converge aussi vers cette limite.

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par u_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ' .

En passant la relation $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ à la limite, on obtient $\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$ d'où $\ell = \ell'$.

d) Si $b = a$ alors les deux suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à a et donc $M(a, a) = a$.

Si $b = 0$ alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est constante égale à 0 et donc $M(a, 0) = 0$.

e) Notons (u'_n) et (v'_n) les suites définies par le procédé précédent à partir de $u'_0 = \lambda a$ et $v'_0 = \lambda b$.

Par récurrence, $u'_n = \lambda u_n$ et $v'_n = \lambda v_n$ donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.

Exercice 41 : [énoncé]

a)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc (a_n) est strictement croissante.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

donc (b_n) est strictement décroissante.

Enfin

$$b_n - a_n = \frac{1}{n.n!} \rightarrow 0$$

b) On a

$$a_q < a_{q+1} \leq e \leq b_{q+1} < b_q$$

Par suite

$$a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{q.q!}$$

puis

$$q.q!a_q < p.q! < q.q!a_q + 1$$

Or $p.q! \in \mathbb{Z}$ et $q.q!.a_q = q \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}$. Absurde.

Exercice 42 : [énoncé]

a) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ donne l'inégalité demandée.

b) Pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = v_n$ en vertu de a.

$$u_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{2v_n}{2} = v_n.$$

c) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ .

Exercice 43 : [énoncé]

a) Aisément (u_n) est croissante (v_n) décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$.

b) Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x \in [0, 1]} |(e^x)^{(n+1)}| = e$. Pour $x = 1$, on obtient

$$|e - u_n| \leq \frac{e}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

donc $u_n \rightarrow e$.

c) Par la stricte monotonie des suites (u_n) et (v_n) on a $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$q.q!u_q$ est un entier et $q.q!v_q$ est l'entier consécutif. Or $q.q!u_q < q.q!e < q.q!v_q$ donc $q.q!e$ ne peut être entier. Or $q.q!e = p.q! \in \mathbb{N}$. Absurde.

Exercice 44 : [énoncé]

La suite (u_n) étant croissante, elle admet une limite (finie ou infinie).

La suite (u_{2n}) qui en est extraite a la même limite.

Or (u_{2n}) converge, il en est donc de même de (u_n) .

Exercice 45 : [énoncé]

$u_{2n} \rightarrow \ell$, $u_{2n+1} \rightarrow \ell'$ et $u_{3n} \rightarrow \ell''$.

(u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) et (u_{3n}) donc $u_{6n} \rightarrow \ell$ et $u_{6n} \rightarrow \ell''$. Par suite $\ell = \ell''$. (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et (u_{3n}) donc $u_{6n+3} \rightarrow \ell'$ et $u_{6n+3} \rightarrow \ell''$. Par suite $\ell' = \ell''$.

Il en découle $\ell = \ell'$.

Puisque les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, la suite (u_n) converge vers celle-ci.

Exercice 46 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons $\cos(n) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$.

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

donne

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2 \cos n \cos(1)$$

A la limite on obtient $2\ell = 2\ell \cos(1)$ d'où $\ell = 0$.

Or $\cos 2n = 2 \cos^2 n - 1$ donne alors à la limite $0 = -1$. Absurde.

Exercice 47 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons $\sin(n) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$.

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

donne

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \sin(1) \cos(n)$$

A la limite, on obtient $\cos(n) \rightarrow 0$.

Or $\cos(2n) = 2 \cos^2(n) - 1$ donne alors à la limite $0 = -1$. Absurde.

Exercice 48 : [énoncé]

D'une part

$$0 \leq u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

D'autre part

$$0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)} \rightarrow 0$$

On en déduit $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 49 : [énoncé]

On définit les valeurs de φ par récurrence en posant

$$\varphi(0) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = \min \{k \in \mathbb{N}/k > \varphi(n-1) \text{ et } u_k \geq n\}$$

Puisque $u_n \rightarrow +\infty$, $\varphi(n)$ est bien défini en tant que plus petit élément d'une partie non vide de \mathbb{N} .

Il est immédiat par construction que φ est une application strictement croissante de \mathbb{N} vers \mathbb{N} .

Il reste à vérifier

$$u_{\varphi(n)} - n \rightarrow 0$$

Par construction, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{\varphi(n)} \geq n$$

et puisque $\varphi(n) - 1 \notin \{k \in \mathbb{N}/k > \varphi(n-1) \text{ et } u_k \geq n\}$, on a

$$\varphi(n) - 1 = \varphi(n-1) \text{ ou } u_{\varphi(n)-1} < n$$

Observons qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de n pour lesquels

$$\varphi(n-1) = \varphi(n) - 1$$

Puisque $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$, à partir d'un rang N , on a

$$|u_{n+1} - u_n| < 1/2$$

Par construction $u_{\varphi(N)} = N + \alpha$ avec $\alpha \geq 0$.

On a alors

$$u_{\varphi(N)+k} \leq N + \alpha + k/2$$

Pour k assez grand, on a

$$u_{\varphi(N)+k} < N + k$$

Or

$$u_{\varphi(N+k)} \geq N + k$$

donc

$$\varphi(N+k) \neq \varphi(N) + k$$

Ainsi, il n'est pas possible que pour tout $p \in \{N+1, \dots, N+k\}$ on ait

$$\varphi(p) - 1 = \varphi(p-1)$$

et donc il existe $p \geq N+1$ vérifiant

$$u_{\varphi(p)-1} < p \text{ et } u_{\varphi(p)} \geq p$$

et puisque $|u_{\varphi(p)} - u_{\varphi(p)-1}| < 1/2$, on a

$$u_{\varphi(p)} \in [p, p+1/2[$$

et par récurrence on obtient

$$\forall q \geq p, u_{\varphi(q)} \in [q, q + 1/2[$$

Au-delà du rang $p + 1$ on ne peut avoir la propriété

$$\varphi(n) - 1 = \varphi(n - 1)$$

car celle-ci entraîne

$$u_{\varphi(n-1)} \in [n - 1, n - 1/2[\text{ et } u_{\varphi(n)} \in [n, n + 1/2[$$

Finalement, on a obtenu qu'à partir d'un certain rang

$$u_{\varphi(n)-1} < n \text{ et } u_{\varphi(n)} \geq n$$

Cela entraîne

$$0 \leq u_{\varphi(n)} - n \leq u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)-1} \rightarrow 0$$

et donc

$$u_{\varphi(n)} - n \rightarrow 0$$

Exercice 50 : [énoncé]

a) Le tableau de variation de $f : x \mapsto x + \tan x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers \mathbb{R} . L'équation E_n possède alors pour solution unique

$$x_n = f^{-1}(n)$$

b) On a $x_n + \tan x_n = n$ avec $x_n \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc

$$x_n = \arctan(n - x_n)$$

Or $n - x_n \rightarrow +\infty$ car (x_n) bornée et donc

$$x_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Exercice 51 : [énoncé]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^x$.

f est dérivable et $f'(x) = (x + 1)e^x > 0$ donc f est strictement croissante.

$f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ donc l'équation $xe^x = n$ possède une unique solution x_n .

$x_n = f^{-1}(n) \rightarrow +\infty$.

Exercice 52 : [énoncé]

a) Le tableau de variation de $f_n : x \mapsto x^n \ln x$ permet d'affirmer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution x_n sur \mathbb{R}^{+*} et que de plus $x_n \in [1, +\infty[$.

b) $1 = x_{n+1}^{n+1} \ln x_{n+1} = x_{n+1} f_n(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}} \leq 1 = f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \leq x_n$ car f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. Posons ℓ sa limite, on a $\ell \geq 1$

Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \ln x_n \geq \ell^n \ln \ell \rightarrow +\infty$ ce qui est absurde car $x_n^n \ln x_n = 1$. Il reste $\ell = 1$.

Exercice 53 : [énoncé]

a) Introduisons la fonction

$$f_n : x \mapsto x^n + \dots + x$$

qui est continue, strictement croissante et vérifie

$$f_n(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

La fonction f_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$, par suite l'équation E_n possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}^+$.

Puisque

$$f_n(1/2) = \frac{1}{2} \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} < 1 \text{ et } f_n(1) = n \geq 1$$

on a $x_n \in [1/2, 1]$.

b) On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \dots + x_n^2 + x_n = x_n(x_n^n + \dots + x_n) + x_n = 2x_n \geq 1$$

donc

$$x_{n+1} \leq x_n$$

La suite (x_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

c) Posons $\ell = \lim x_n$. Puisque $x_2 < 1$, $x_n \leq x_2$ donne à la limite $\ell < 1$.

$$1 = x_n^n + \dots + x_n = x_n \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n}$$

donne à la limite

$$1 = \frac{\ell}{1 - \ell}$$

car $0 \leq x_n^n \leq x_2^n \rightarrow 0$ et finalement

$$\ell = 1/2$$

Exercice 54 : [énoncé]

On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. On observe que $f_n(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f'_{n+1} = f_n$. La propriété est vrai pour $n = 1$ et si elle est vrai au rang n , le tableau de signe de f_n permet d'assurer que f_{n+1} est décroissante (et donc strictement négative) sur $[0, x_n]$ puis strictement croissante sur $[x_n, +\infty]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut assurer que f s'annule en un $x_{n+1} > x_n$ et celui-ci est unique.

La suite (x_n) est croissante. Si elle est majorée alors elle converge vers un réel ℓ et $\frac{x_n^n}{n!} \rightarrow 0$. Or la suite de terme général est $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$ est croissante et strictement positive. Elle ne peut donc converger vers 0. Par conséquent la suite (x_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 55 : [énoncé]

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$ assure l'existence et l'unicité de $u_n > 0$ vérifiant la relation

$$nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$$

De plus on peut affirmer $u_n \geq 1$.

Puisque

$$u_n^n(n(u_n - 1) - 1) = 1 \text{ et } u_n^n \geq 1$$

on a

$$n(u_n - 1) - 1 \leq 1$$

puis

$$0 \leq u_n - 1 \leq 2/n$$

permet de conclure $u_n \rightarrow 1$.

Exercice 56 : [énoncé]

a) Posons $v_n = u_n + 1$. (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 1$ donc $u_n = 2^n - 1 \rightarrow +\infty$.

b) Posons $v_n = u_n - 1$. (v_n) est géométrique de raison $1/2$ et $v_0 = -1$ donc $u_n = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1$.

Exercice 57 : [énoncé]

On a

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$$

donc

$$z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0$$

Or $\left|\frac{1+i}{2}\right| < 1$ donc $z_n \rightarrow 0$ puis $x_n, y_n \rightarrow 0$.

Exercice 58 : [énoncé]

Introduisons $x_n = \operatorname{Re}(z_n)$ et $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$. On a

$$x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$$

$x_n \rightarrow x_0$ et $y_n \rightarrow 0$ donc $z_n \rightarrow \operatorname{Re}(z_0)$.

Exercice 59 : [énoncé]

a) $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$ et $u_0 - v_0 = -1$ donc $(u_n - v_n)$ est constante égale à -1 .

b) $v_n = u_n + 1$ donc $u_{n+1} = 5u_n + 2$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

c) $u_{n+1} - a = 5(u_n - a) + 4a + 2$. Pour $a = -1/2$, $(u_n - a)$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $3/2$. Ainsi

$$u_n = \frac{3.5^n - 1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3.5^n + 1}{2}$$

Exercice 60 : [énoncé]

a) $z_1 = \rho^{\frac{1+e^{i\theta}}{2}} = \rho \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$, $z_2 = \rho \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} e^{i\frac{\theta}{4}}$, ..., donc

$$z_n = \rho \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} e^{i\frac{\theta}{2^k}}$$

b) $e^{i\theta/2^n} \rightarrow 1$ et

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \sim \frac{\sin \theta}{\theta}$$

donc

$$z_n \rightarrow \rho \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Exercice 61 : [énoncé]

On peut écrire $z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$

On a alors

$$z_1 = \rho \frac{1 + e^{i\theta}}{2} = \rho \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}, z_2 = \rho \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} e^{i\frac{\theta}{4}}, \dots, z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k}$$

Si $\theta = 0$ alors $z_n = \rho \rightarrow \rho$.

Simons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin \frac{\theta}{2^n} \neq 0$ et

$$\sin \frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n}$$

par exploitations successives de l'identité $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

On en déduit

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Finalement

$$z_n \rightarrow \rho \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Exercice 62 : [énoncé]

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, \dots$

Par récurrence, on montre aisément

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + 1$$

Exercice 63 : [énoncé]

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (3 - 2i)r + (5 - 5i) = 0$.

On obtient

$$u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n$$

Exercice 64 : [énoncé]

a) $u_n = 2^n(1 - n)$ b) $u_n = -3 + 2^{2-n}$ c) $u_n = 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{3}$.

Exercice 65 : [énoncé]

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0$$

de solutions $r = e^{i\theta}$ et $r = e^{-i\theta}$.

Par suite, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta$$

$n = 0$ donne $\alpha = 1$ et $n = 1$ donne $\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = 1$ donc

$$\beta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta/2}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n\theta + \tan \frac{\theta}{2} \sin n\theta = \frac{\cos((2n-1)\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$$

Exercice 66 : [énoncé]

Soit f une fonction solution.

Pour $x > 0$, on considère la suite (u_n) déterminée par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite (u_n) est formée de réels strictement positifs et satisfait la relation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique associée sont 2 et -3 de sorte qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n$$

Puisque la suite (u_n) n'est formée que de réels strictement positifs, il est nécessaire que μ soit nul.

Après résolution cela donne $f(x) = 2x$.

Inversement, cette fonction est bien solution.

Exercice 67 : [énoncé]

On a $u_0 = a, u_1 = a^2, u_2 = a^4$, par récurrence $u_n = a^{2^n}$.

Pour $|a| < 1$ alors $u_n \rightarrow 0$, pour $|a| = 1$, $u_n \rightarrow 1$ et pour $|a| > 1$, $u_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 68 : [énoncé]

La suite (u_n) est bien définie et supérieure à 1 à partir du rang 1 car la fonction itératrice $f : x \mapsto x^2 + 1$ est définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans $[1, +\infty[$.

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 \geq 0 \text{ car le discriminant de } x^2 - x + 1 \text{ est } \Delta = -3 < 0.$$

La suite (u_n) est croissante.

Si celle-ci converge vers un réel ℓ alors en passant à la limite la relation d'itération : $\ell = \ell^2 + 1$.

Or cette équation ne possède pas de racines réelles. Par suite (u_n) diverge, or elle est croissante, donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 69 : [énoncé]

Pour tout $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_{n-1}}}$$

Puisque $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.

Si (u_n) converge vers ℓ alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ donne à la limite $\ell = \sqrt{1+\ell}$ donc $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ et $\ell \geq 0$.

Par suite

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha$$

Par récurrence on montre aisément que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$ et par suite (u_n) converge vers α .

Exercice 70 : [énoncé]

La suite (u_n) est bien définie et à valeurs strictement supérieure à 1 car sa fonction itératrice $f : x \mapsto 1 + \ln x$ est définie sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $[1, +\infty[$.

Pour $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.

La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de

$$u_1 - u_0 = 1 + \ln u_0 - u_0.$$

Etudions la fonction $g(x) = x \mapsto 1 + \ln x - x$ définie sur $[1, +\infty[$.

g est dérivable, $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \leq 0$ ne s'annulant qu'en 1, $g(1) = 0$ donc g est strictement négative sur $[1, +\infty[$.

La suite (u_n) est décroissante. De plus elle est minorée par 1, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 1$.

En passant la relation d'itération à la limite, on obtient $\ell = 1 + \ln \ell$ i.e. $g(\ell) = 0$.

Par l'étude de la fonction g , on conclut $\ell = 1$.

Finalement (u_n) converge vers 1.

Exercice 71 : [énoncé]

La suite (u_n) est bien définie car sa fonction itératrice $f : x \mapsto e^x - 1$ est définie sur \mathbb{R} .

Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = e^{u_n} - e^{u_{n-1}}$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.

La suite (u_n) est monotone et de monotonie déterminée par le signe de $u_1 - u_0 = e^{u_0} - u_0 - 1$.

Etudions la fonction $g(x) = e^x - x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

g est dérivable et $g'(x) = e^x - 1$ du signe de x . $g(0) = 0$ donc g est positive.

Si $u_0 = 0$ alors (u_n) est constante égale à 0.

Si $u_0 > 0$ alors (u_n) est croissante. Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = e^\ell - 1$ donc $\ell = 0$.

Or (u_n) est minorée par $u_0 > 0$ donc ne peut converger vers 0. Par suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Si $u_0 < 0$ alors (u_n) est croissante et majorée par 0 donc (u_n) converge vers la seule limite finie possible 0.

Exercice 72 : [énoncé]

La suite (u_n) est bien définie et strictement positive car de fonction itératrice $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ définie sur \mathbb{R}^{+*} et à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} . Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2+\ell}$ et $\ell \geq 0$ donc $\ell = -1 + \sqrt{2}$.

$$|u_{n+1} - \ell| = \left| \frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{(2+u_n)(2+\ell)} \leq \frac{1}{4} |u_n - \ell|$$

Par récurrence, on montre $|u_n - \ell| = \frac{1}{4^n} |u_0 - \ell|$ et on conclut $u_n \rightarrow \ell$.

Exercice 73 : [énoncé]

a) L'application $x \mapsto \sqrt{2-x}$ est définie de $[-2, 2]$ vers $[0, 2] \subset [-2, 2]$.

b) Supposons $u_n \rightarrow \ell$. Puisque $\forall n \geq 1, u_n \in [0, 2]$, à la limite $\ell \in [0, 2]$.

La relation $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$ donne à la limite $\ell = \sqrt{2-\ell}$ donc $\ell^2 + \ell - 2 = 0$ d'où $\ell = 1$ ou $\ell = -2$.

Or $\ell \geq 0$ donc $\ell = 1$.

c)

$$|u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{1 + \sqrt{2-u_n}} \leq |u_n - 1|$$

donc $(|u_n - 1|)$ est décroissante et par suite converge vers $\alpha \geq 0$.

Si $\alpha > 0$ alors

$$1 + \sqrt{2-u_n} = \frac{|u_n - 1|}{|u_{n+1} - 1|} \rightarrow 1$$

donc $\sqrt{2-u_n} \rightarrow 0$ puis $u_n \rightarrow 2$. C'est impossible.

Nécessairement $|u_n - 1| \rightarrow 0$ et donc $u_n \rightarrow 1$.

Exercice 74 : [énoncé]

Par récurrence montrons u_n existe et $|u_n| < 1$.

Pour $n = 0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

Par HR, u_n existe et $|u_n| < 1$ donc $2 - u_n \neq 0$ d'où $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ existe et

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{|2-u_n|} \leq \frac{|u_n|}{2-|u_n|} < 1$$

Récurrence établie.

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2-|u_n|} \leq |u_n|$$

donc ($|u_n|$) est décroissante d'où $|u_n| \leq |a|$ puis

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2-|a|}$$

puis

$$|u_n| \leq \left(\frac{1}{2-|a|} \right)^n |a| \rightarrow 0$$

Par suite $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 75 : [énoncé]

La suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[\sqrt{a}, +\infty[$ à partir du rang 1 car de fonction itératrice

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et à valeurs dans $[\sqrt{a}, +\infty[$.

Si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right)$ et $\ell \geq 0$ donc $\ell = \sqrt{a}$.

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2} \left| u_n + \frac{a}{u_n} - \sqrt{a} \right| = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2|u_n|} = \frac{|u_n - \sqrt{a}|}{2} \frac{|u_n - \sqrt{a}|}{u_n}$$

Pour $n \geq 1$,

$$\frac{|u_n - \sqrt{a}|}{u_n} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leq 1$$

donc

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{a}|$$

Par récurrence :

$$|u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - \sqrt{a}|$$

donc $u_n \rightarrow \sqrt{a}$.

b)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{u_n^2 + 2\sqrt{a}u_n + a} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \right)^2 = v_n^2$$

donc $v_n = v_0^{2^n}$.

c)

$$|u_n - \sqrt{a}| \leq v_n |u_n + \sqrt{a}| \leq 2u_0 v_n = 2u_0 v_0^{2^n}$$

Exercice 76 : [énoncé]

a) $f : x \mapsto \ln x + x$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+\star}$ vers \mathbb{R} .

L'équation proposée possède une unique solution $\alpha = f^{-1}(0)$.

b) L'algorithme de Newton, propose de définir la suite (u_n) par la relation :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{\ln u_n + u_n}{1/u_n + 1} = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{u_n + 1}$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 , $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ne s'annulent pas. Pour $u_0 > 0$ tel que $f(u_0)f''(u_0) \geq 0$, la suite converge vers α .

Exercice 77 : [énoncé]

Par récurrence, on montre que u_n existe et $u_n > 0$. La relation de récurrence donne alors

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

La suite (u_{n+1}/u_n) est constante égale à $u_1/u_0 = b/a$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison b/a et finalement

$$u_n = a \left(\frac{b}{a} \right)^n$$

La suite (u_n) converge si, et seulement si, $b \leq a$.

Exercice 78 : [énoncé]

a) Pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k} - \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k} = \frac{u_n}{\sqrt{\sum_{k=0}^n u_k} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}} \geq 0$$

donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Supposons $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$. On a $\ell \geq u_1 = \sqrt{a} > 0$

En passant la relation précédente à la limite : $0 = \frac{\ell}{\ell+\ell} = \frac{1}{2}$. C'est absurde.

Par suite $u_n \rightarrow +\infty$.

b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_{n+1} + u_n}$$

donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1}{u_{n+1} + u_n} \rightarrow 0$$

Par suite $u_{n+1} \sim u_n$ et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}/u_n + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Exercice 79 : [énoncé]

Posons (u_n) la suite déterminée par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

La suite (u_n) est bien définie et à valeurs positive.

Si celle-ci converge, c'est vers $\ell \geq 0$ vérifiant $\ell = \sqrt{1 + \ell}$ i.e.

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (nombre d'Or)}$$

On a

$$|u_{n+1} - \ell| = \left| \sqrt{1 + u_n} - \sqrt{1 + \ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + \ell}} \leq \frac{|u_n - \ell|}{2}$$

Par récurrence, on obtient

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \ell|$$

et donc $u_n \rightarrow \ell$.

Ainsi

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = \ell$$

Posons (v_n) la suite déterminée par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$.

La suite (v_n) est bien définie et à valeurs supérieures à 1.

Si celle-ci converge, c'est vers $\ell' \geq 1$ vérifiant $\ell' = 1 + \frac{1}{\ell'}$. On retrouve $\ell' = \ell$.

On a

$$|v_{n+1} - \ell| = \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell} \right| \leq \frac{|v_n - \ell|}{|v_n| \ell} \leq \frac{|v_n - \ell|}{\ell}$$

Par récurrence, on obtient

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{\ell^n} |v_0 - \ell|$$

et donc $v_n \rightarrow \ell$ car $\ell > 1$.

Ainsi

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = \ell$$

Exercice 80 : [énoncé]

On vérifie sans difficultés que la suite (v_n) est définie et que ses termes sont positifs.

De plus, on vérifie par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 1$$

car

$$(1 - u_{n+1})(1 - v_n) \geq 0 \Rightarrow \frac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n} \leq 1$$

On a alors

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}(1 - v_n^2)}{1 + u_{n+1}v_n} \geq 0$$

et la suite (v_n) est donc croissante et majorée. Par conséquent celle-ci converge vers une certaine limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Dans le cas où la suite (u_n) est constante égale à 1, on observe que $\ell = 1$.

Peut-être est-ce encore vrai dans le cas général ? Pour le voir, étudions la suite $(1 - v_n)$. On a

$$0 \leq 1 - v_{n+1} = \frac{(1 - u_{n+1})(1 - v_n)}{1 + u_{n+1}v_n} \leq \frac{1}{2}(1 - v_n)$$

donc par récurrence

$$0 \leq 1 - v_n \leq \frac{1}{2^n}(1 - v_0)$$

et on en déduit

$$v_n \rightarrow 1$$

Exercice 81 : [énoncé]

Si (u_n) converge sa limite ℓ vérifie $\ell = 1 + \ell^2/4$ d'où $\ell = 2$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2 \geq 0$$

(u_n) est croissante.

Si $u_0 > 2$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Si $u_0 \in [0, 2]$ alors on vérifie aisément que (u_n) est majorée par 2 et on conclut $u_n \rightarrow 2$.

Exercice 82 : [énoncé]

$u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante. Par récurrence montrons $u_n \leq a + 1$. La relation est vraie pour $n = 1$ et l'hérédité s'obtient par

$$u_{n+1} = \sqrt{a + u_n} \leq \sqrt{2a + 1} \leq a + 1.$$

Exercice 83 : [énoncé]

a) Il suffit de dresser le tableau de variation de f . On note $\alpha < \beta < \gamma$ ces trois racines.

b) f est croissante et	x	α	β	γ
	$f(x) - x$	-	0	+

c) $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ donc $u_0 \leq f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ croissante.

De même $u_n \geq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ donc $u_0 \geq f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ décroissante. Les seules limites finies possibles pour (u_n) sont α, β, γ .

Enfin si $u_0 \leq \alpha$ (resp. β, γ) alors pour tout n , $u_n \leq \alpha$ (resp. β, γ) et de même pour \geq .

Au final on peut conclure :

$u_0 \in]-\infty, \alpha]$ donne (u_n) décroissant vers $-\infty$.

$u_0 = \alpha$ donne (u_n) constante égale à α .

$u_0 \in]\alpha, \gamma[$ donne (u_n) convergeant vers β .

$u_0 = \gamma$ donne (u_n) constante égale à γ .

$u_0 \in]\gamma, +\infty[$ donne (u_n) croissant vers $+\infty$.

Exercice 84 : [énoncé]

$f'(x)$ est du signe de $3(x^2 - a)^2$ donc f est croissante et par suite (u_n) est monotone.

Les racines de l'équation $f(x) = x$ sont $0, \sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Ce sont les seules limites possibles pour (u_n) .

$f(x) - x$ est du signe de $ax - x^3 = -x(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$.

Si $u_0 \in]0, \sqrt{a}]$ la suite est croissante et majorée par \sqrt{a} donc converge vers \sqrt{a} .

Si $u_0 \in [\sqrt{a}, +\infty[$ la suite est décroissante et minorée par \sqrt{a} donc converge vers \sqrt{a} .

Exercice 85 : [énoncé]

$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc (u_n) est décroissante. Ainsi, on montre que $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc on peut conclure que (u_n) converge. Sa limite ℓ vérifie

$$\ell = \ell - \ell^2$$

d'où $\ell = 0$.

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1} \rightarrow u_0$$

et

$$\prod_{k=0}^n (1 - u_k) = \prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} \rightarrow 0$$

Exercice 86 : [énoncé]

a) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.

g est continue, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$ donc g s'annule en un point α qui est alors point fixe de f .

Si α et β sont deux points fixes distincts alors par application du théorème des accroissements finis, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 1$ ce qui est incompatible avec les hypothèses.

b) La fonction $x \mapsto |f'(x)|$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle y admet donc un maximum en un point $c \in [a, b]$ et en posant $k = |f'(c)|$ on a

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq k \text{ avec } k \in [0, 1[$$

Par l'inégalité des accroissements finis, f est k lipschitzienne et alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u - \alpha| \rightarrow 0$$

d'où le résultat.

Exercice 87 : [énoncé]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(f(u_n) - f(u_{n-1})) + (u_n - u_{n-1})}{2}$$

Puisque f est 1 lipschitzienne on a

$$|f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq |u_n - u_{n-1}|$$

donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$,
(en fait la fonction itératrice est croissante).

Par suite (u_n) est monotone et étant bornée elle converge vers un $\ell \in [a, b]$.

La relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}$$

donne à la limite

$$\ell = \frac{\ell + f(\ell)}{2}$$

donc $f(\ell) = \ell$.

Exercice 88 : [énoncé]

a) On observe que $x \mapsto 4x - x^2$ est une application de $[0, 4]$ dans lui-même. Par suite $u_n \in [0, 4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) converge alors, en posant ℓ sa limite, on a $\ell = 4\ell - \ell^2$ d'où $\ell = 0$ ou $\ell = 3$.

b) Supposons que $u_n \rightarrow 0$. S'il existe un rang n tel que $u_n = 0$ alors la suite (u_n) est stationnaire égale à 0. Sinon on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$u_{n+1} - u_n \sim 3u_n > 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite est strictement croissante. De même si $u_n \rightarrow 3$ sans être stationnaire égale à 3, on observe que la suite $|u_n - 3|$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

c) On obtient aisément $u_n = 4 \sin^2 2^n \alpha$. La suite est stationnaire si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ ou 3 i.e. $\sin^2(2^n \alpha) = 0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2$ soit encore $2^n \alpha = k\pi/3$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi les u_0 pour lesquels la suite est stationnaire sont les $\sin(k\pi/3 \cdot 2^n)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 89 : [énoncé]

a) $z_1 = \frac{\rho e^{i\theta} + \rho}{2} = \rho \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$. Par ce principe :

$$z_n = \rho \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$$

b) $e^{i\frac{\theta}{2^n}} \rightarrow 1$ et

$$\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ (ou 1 si } \theta = 0)$$

Finalement $z_n \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta}$.

Exercice 90 : [énoncé]

On a $u_n \leq v_n$ et $u_{n+1} \leq v_n$, $v_{n+1} = \max(u_{n+2}, u_{n+1})$ avec $u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \leq v_n$ et $u_{n+1} \leq v_n$ donc (v_n) est décroissante.

(v_n) est décroissante et minorée par 0 donc (v_n) converge.

On a $u_{n+1} \leq v_n$.

$$v_{n+1} \leq \max\left(\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n), u_{n+1}\right) = \max\left(\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n), \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_{n+1})\right) = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

donc $2v_{n+1} - v_n \leq u_{n+1} \leq v_n$ donc (u_n) converge vers la même limite que (v_n) .

Exercice 91 : [énoncé]

Les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et à termes positifs.

Sachant

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

on a

$$\forall n \geq 1, u_n \leq v_n$$

puis

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ et } v_{n+1} \leq v_n$$

Les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont respectivement croissante et décroissante et on a

$$\forall n \geq 1, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

Par convergence monotone, (u_n) et (v_n) convergent vers des limites ℓ et ℓ' .

En passant la relation

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

à la limite on obtient $\ell = \ell'$.

Exercice 92 : [énoncé]

a) Exploiter $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ et raisonner par récurrence.
b)

$$\sin \frac{\alpha}{2^n} v_n = \frac{1}{2^n} \sin \alpha$$

via $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$. Par suite

$$v_n \sim \frac{\sin \alpha}{2^n \sin(\alpha/2^n)} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

et aussi

$$u_n \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Exercice 93 : [énoncé]

Notons que la suite (y_n) est croissante, elle est donc convergente si, et seulement si, elle est majorée.

a) Ici $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$. Soit ℓ la racine positive de l'équation $\ell^2 - \ell - a = 0$ i.e.

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

On remarque que $y_1 = \sqrt{a} \leq \ell$ et on montre par récurrence $y_n \leq \ell$. La suite (y_n) est croissante et majorée donc convergente.

b) On observe que la nouvelle suite (y_n) est désormais égale à b fois la précédente, elle est donc convergente.

c) Si (y_n) converge vers ℓ alors $x_n^{2^{-n}} \leq y_n \leq \ell$ donc $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Si $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée par une certaine M alors $x_n \leq M^{2^n}$, la suite (y_n) définie par (x_n) est alors inférieure à celle obtenue par (M^{2^n}) , cette dernière étant convergente, la suite (y_n) converge.

Exercice 94 : [énoncé]

Posons

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

On vérifie aisément que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{M+2} \leq u_n \leq 1$$

Supposons la convergence de la suite (u_n) . Sa limite est strictement positive. En résolvant l'équation définissant u_{n+1} en fonction de u_n , on obtient

$$a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - u_n - 1$$

On en déduit que la suite (a_n) converge.

Inversement, supposons que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ , $\ell \geq 0$.

Considérons la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On vérifie que la suite (v_n) est bien définie et à termes strictement positifs.

L'équation

$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$

possède une racine $L > 0$ et on a

$$|v_{n+1} - L| \leq \frac{|v_n - L|}{1 + L}$$

ce qui permet d'établir que la suite (v_n) converge vers L . Considérons ensuite la suite (α_n) définie par

$$\alpha_n = u_n - v_n$$

On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + (\ell - a_n)}{(u_n + a_n + 1)(v_n + \ell + 1)}$$

et donc

$$|\alpha_{n+1}| \leq k (|\alpha_n| + |a_n - \ell|)$$

avec

$$k = \frac{1}{m+1} \in [0, 1[$$

où $m > 0$ est un minorant de la suite convergente (v_n) .

Par récurrence, on obtient

$$|\alpha_n| \leq k^n |\alpha_0| + \sum_{p=0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque la suite (a_n) converge vers ℓ , il existe p_0 tel que

$$\forall p \geq p_0, |a_p - \ell| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\sum_{p=p_0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} k^p = \frac{k\varepsilon}{1-k}$$

Pour n assez grand

$$\sum_{p=0}^{p_0-1} k^{n-p} |a_p - \ell| = C^{te} k^n \leq \varepsilon \text{ et } k^n |\alpha_0| \leq \varepsilon$$

et on en déduit

$$|\alpha_n| \leq 2\varepsilon + \frac{k\varepsilon}{1-k}$$

Ainsi $\alpha_n \rightarrow 0$ et par conséquent

$$u_n \rightarrow L$$

Exercice 95 : [énoncé]

La fonction itératrice de cette suite récurrente est

$$g : x \mapsto \frac{1}{2} (f(x) + x)$$

On vérifie aisément que cette fonction est définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$.

On en déduit que la suite (x_n) est bien définie et que c'est une suite d'éléments de $[a, b]$.

On a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1})) + (x_n - x_{n-1})}{2}$$

Puisque f est 1-lipschitzienne, on a

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

et donc $x_{n+1} - x_n$ est du signe de $x_n - x_{n-1}$. Par conséquent, la suite (x_n) est monotone et sa monotonie découle du signe de $x_1 - x_0$. La suite (x_n) étant de plus bornée, elle converge vers une certaine limite ℓ avec $\ell \in [a, b]$.

La relation

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$$

donne à la limite sachant f continue

$$\ell = \frac{\ell + f(\ell)}{2}$$

donc $f(\ell) = \ell$.