

Limite et continuité

Généralités sur les fonctions

Exercice 1 [01779] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.

Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 2 [01780] [\[correction\]](#)

Etudier la parité de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$$

Exercice 3 [01783] [\[correction\]](#)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 4 [00501] [\[correction\]](#)

Soit f une fonction croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

- a) Montrer que s'il existe $x \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^k(x) = x$ alors x est un point fixe pour f .
- b) Montrer que f admet un point fixe.

Calcul de limites

Exercice 5 [01784] [\[correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x}$	c) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$
d) $\lim_{x \rightarrow 1+} \ln x \cdot \ln(\ln x)$	e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$	f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\arccos x}$

Exercice 6 [01785] [\[correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right)$	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos e^x}{x^2 + 1}$	c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x}$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \arctan x}{x}$	e) $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor 1/x \rfloor$	f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \lfloor 1/x \rfloor$

Exercice 7 [01786] [\[correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0+} \lfloor 1/x \rfloor$	b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \lfloor 1/x \rfloor$	c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \lfloor 1/x \rfloor$
--	---	---

Propriétés des limites

Exercice 8 [01789] [\[correction\]](#)

a) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique convergeant en $+\infty$. Montrer que g est constante.

b) Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f converge en $+\infty$, g périodique et $f + g$ croissante.

Montrer que g est constante.

Exercice 9 [01788] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T périodique (avec $T > 0$) telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ existe dans \mathbb{R} .

Montrer que f est constante.

Exercice 10 [01787] [\[correction\]](#)

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

Montrer que l'application $x \mapsto \lim_{x^+} f$ est croissante.

Etude de continuité

Exercice 11 [01793] [\[correction\]](#)

Etudier la continuité sur \mathbb{R} de l'application

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

Exercice 12 [01794] [\[correction\]](#)

Etudier la continuité de

$$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$$

Exercice 13 [01795] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est totalement discontinue.

Exercice 14 [01796] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x)$ est croissante et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.

Montrer que f est continue.

Exercice 15 [01797] [\[correction\]](#)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

Montrer que $\sup(f, g)$ est une fonction continue sur I .

Exercice 16 [00240] [\[correction\]](#)

Étudier la continuité de la fonction

$$f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

définie sur \mathbb{R}^+ .

Théorème des valeurs intérmédiaires

Exercice 17 [01803] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{-\infty} f = -1$ et $\lim_{+\infty} f = 1$. Montrer que f s'annule.

Exercice 18 [01800] [\[correction\]](#)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 19 [03719] [\[correction\]](#)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- a) Montrer que si $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors f admet un point fixe.
- b) Montrer que si $[a, b] \subset f([a, b])$ alors f admet un point fixe.

Exercice 20 [01806] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante.

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 21 [01807] [\[correction\]](#)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 22 [01801] [\[correction\]](#)

Montrer que les seules applications continues de \mathbb{R} vers \mathbb{Z} sont les fonctions constantes.

Exercice 23 [01804] [\[correction\]](#)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que

$$\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)| \neq 0$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 24 [01809] [\[correction\]](#)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $|f| \xrightarrow{+\infty} +\infty$. Montrer que $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$ ou $f \xrightarrow{+\infty} -\infty$.

Exercice 25 [01802] [\[correction\]](#)

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{R}^+$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$p.f(a) + q.f(b) = (p+q).f(c)$$

Exercice 26 [01805] [correction]

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha \in [0, 1 - 1/n]$ tel que

$$f(\alpha + 1/n) = f(\alpha)$$

Exercice 27 [00242] [correction]

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues vérifiant

$$f \circ g = g \circ f$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ telle que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 28 [01808] [correction]

Notre objectif dans cet exercice est d'établir la proposition :

Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone.

Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose :

$$\exists (x_1, y_1) \in I^2, x_1 < y_1 \text{ et } f(x_1) \geq f(y_1) \text{ et } \exists (x_2, y_2) \in I^2, x_2 < y_2 \text{ et } f(x_2) \leq f(y_2)$$

Montrer que la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

s'annule. Conclure.

Exercice 29 [03350] [correction]

Montrer la surjectivité de l'application

$$z \in \mathbb{C} \mapsto z \exp(z) \in \mathbb{C}$$

Théorème des bornes atteintes

Exercice 30 [01813] [correction]

Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur \mathbb{R} est bornée.

Exercice 31 [01812] [correction]

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 32 [01810] [correction]

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha$$

Exercice 33 [01811] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$$

Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 34 [01815] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que chaque $y \in \mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f .

Montrer qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ possédant exactement un antécédent.

Exercice 35 [03437] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique ($T > 0$).

a) Montrer que f est bornée.

b) Justifier l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$f([x, x + T/2]) = \text{Im } f$$

Exercice 36 [03722] [correction]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(a) = f(b)$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \sigma \in [0, \alpha], \exists x \in [a, b - \sigma], f(x + \sigma) = f(x)$$

Exercice 37 [04099] [correction]

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue possédant une limite finie ℓ en $+\infty$.

Montrer que la fonction f est bornée.

Bijection continue

Exercice 38 [01816] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

- a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers $]-1, 1[$.
 b) Déterminer, pour $y \in]-1, 1[$ une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Exercice 39 [01817] [correction]

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante.

Montrer que f est continue si, et seulement si, $f(]a, b[) = \left[\lim_a f, \lim_b f \right]$.

Exercice 40 [03105] [correction]

Soit α un réel compris au sens large entre 0 et $1/e$.

- a) Démontrer l'existence d'une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x+1)$$

- b) Si $\alpha = 1/e$, déterminer deux fonctions linéairement indépendantes vérifiant la relation précédente.

Exercice 41 [03401] [correction]

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continue vérifiant

$$f \circ f = \text{Id}$$

Déterminer f .

Continuité et équation fonctionnelle

Exercice 42 [01790] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 43 [01791] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$$

Montrer que f est constante.

Exercice 44 [00244] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

Montrer que f est constante.

Exercice 45 [01792] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et prenant la valeur 1 en 0.

On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos x$$

Déterminer f .

Exercice 46 [01798] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

- a) Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
 b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
 c) Etablir que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$ avec $a = f(1)$.
 d) Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Exercice 47 [00243] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On suppose en outre que la fonction f est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
 Déterminer la fonction f .

Exercice 48 [01799] [correction]

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose f solution et $f(0) = f(1) = 0$.

Montrer que f est périodique et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(2x)$$

En déduire que f est nulle.

b) Déterminer toutes les fonctions f solutions.

Exercice 49 [03721] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose $f(0) = 0$. Vérifier

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

b) On revient au cas général, déterminer f .

Fonctions lipschitziennes

Exercice 50 [01781] [correction]

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \leq |x|$.

Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ est 1 lipschitzienne.

Exercice 51 [01782] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k lipschitzienne (avec $k \in [0, 1[$) telle que $f(0) = 0$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 52 [01814] [correction]

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On pose

$$\varphi(t) = \sup_{x \in [0, 1]} (f(x) + tg(x))$$

Montrer que φ est bien définie sur \mathbb{R} et qu'elle y est lipschitzienne.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Soient $x < y \in \mathbb{R}$. $f(x) \leq f(y) \Rightarrow f \circ f \circ f(x) \leq f \circ f \circ f(y) \Rightarrow y \leq x$
 car $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante.
 Par contraposée $x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$ et donc f est strictement décroissante.

Exercice 2 : [énoncé]

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

donc la fonction f est définie sur \mathbb{R} qui est un intervalle symétrique par rapport à 0.

En multipliant par la quantité conjuguée

$$f(-x) = \ln \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = \ln \left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right)$$

donc

$$f(-x) = -\ln \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) = -f(x)$$

La fonction f est donc impaire.

Exercice 3 : [énoncé]

$\{x \in [0, 1] / f(x) \geq x\}$ est non vide (0 y appartient) et est majoré (par 1).

On peut donc poser $\alpha = \sup \{x \in [0, 1] / f(x) \geq x\}$.

Pour tout $x > \alpha$, on a $f(x) < x$ donc $f(\alpha) \leq f(x) < x$.

Puisque $f(\alpha) \leq x$ pour tout $x > \alpha$, on a aussi $f(\alpha) \leq \alpha$.

Pour tout $x < \alpha$, il existe $t \in]x, \alpha]$ tel que $f(t) \geq t$ donc $f(\alpha) \geq f(t) \geq t \geq x$.

Puisque ceci vaut pour tout $x < \alpha$, on a aussi $f(\alpha) \geq \alpha$.

Finalement $f(\alpha) = \alpha$.

On peut aussi procéder par dichotomie.

Exercice 4 : [énoncé]

a) Si $f(x) > x$ alors par croissance de f ,

$$f^k(x) \geq f^{k-1}(x) \geq \dots \geq f(x) > x$$

ce qui est absurde. Une étude analogue contredit $f(x) < x$.

b) On a $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. Par dichotomie, on peut construire deux suites (a_n) et (b_n) vérifiant

$$f(a_n) \geq a_n \text{ et } f(b_n) \leq b_n$$

On initie les suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Une fois les termes a_n et b_n déterminés, on introduit $m = (a_n + b_n)/2$.

Si $f(m) \geq m$ on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.

Si non, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.

Les suites (a_n) et (b_n) ainsi déterminées sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune c . Puisque $a_n \leq c \leq b_n$, on a par croissance

$$f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n)$$

et donc

$$a_n \leq f(c) \leq b_n$$

Or (a_n) et (b_n) convergent vers c donc par encadrement

$$f(c) = c$$

On peut aussi décrire un point fixe de f en considérant

$$c = \sup \{x \in [0, 1], f(x) \geq x\}$$

Les deux questions de cet oral ne semblent pas être liées.

Exercice 5 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x} = \frac{1 - 1/\sqrt{x}}{\frac{\ln x}{x} + 1} \rightarrow 1$$

c) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$x^x = e^{x \ln x} = e^X$$

avec $X = x \ln x \rightarrow 0$ donc $x^x \rightarrow 1$.

d) Quand $x \rightarrow 1^+$,

$$\ln x \cdot \ln(\ln x) = X \ln X$$

avec $X = \ln x \rightarrow 0$ donc $\ln x \cdot \ln(\ln x) \rightarrow 0$

e) Quand $x \rightarrow 0$,

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^X$$

avec $X = \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ donc $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$.

f) Quand $x \rightarrow 1$,

$$\frac{1-x}{\arccos x} = \frac{1-\cos y}{y} = \frac{2 \sin^2(y/2)}{y} = \sin(y/2) \frac{\sin(y/2)}{y/2}$$

avec $y = \arccos x \rightarrow 0$ donc $\sin y/2 \rightarrow 0$ et $\frac{\sin y/2}{y/2} \rightarrow 1$ puis $\frac{1-x}{\arccos x} \rightarrow 0$.

Exercice 6 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \rightarrow 0$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\left| \frac{x \cos e^x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow 0$$

c) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$e^{x-\sin x} \geq e^{x-1} \rightarrow +\infty$$

d) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\left| \frac{x + \arctan x}{x} - 1 \right| \leq \frac{\arctan x}{x} \leq \frac{\pi}{2x} \rightarrow 0$$

e) Quand $x \rightarrow 0$,

$$1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$

donc

$$|\lfloor 1/x \rfloor - 1/x| \leq 1$$

puis

$$|x \lfloor 1/x \rfloor - 1| \leq |x| \rightarrow 0$$

f) Quand $x \rightarrow +\infty$, $1/x \rightarrow 0$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ puis $x \lfloor 1/x \rfloor = 0 \rightarrow 0$.

Exercice 7 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$E \lfloor 1/x \rfloor \geq \frac{1}{x} - 1 \rightarrow +\infty$$

b) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$

donne

$$1 - x \leq x \lfloor 1/x \rfloor \leq 1$$

puis $x \lfloor 1/x \rfloor \rightarrow 1$.

Quand $x \rightarrow 0^-$,

$$1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$

donne

$$1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1 - x$$

puis à nouveau $x \lfloor 1/x \rfloor \rightarrow 1$.

c) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$|x^2 \lfloor 1/x \rfloor| \leq \frac{x^2}{x} \rightarrow 0$$

via

$$0 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$

et quand $x \rightarrow 0^-$,

$$|x^2 \lfloor 1/x \rfloor| \leq x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) \rightarrow 0$$

via

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 0$$

Exercice 8 : [énoncé]

Notons T une période strictement positive de g .

a) Notons ℓ la limite de g en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(x+nT) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ donc par unicité de la limite : $g(x) = \ell$. Ainsi g est constante.

b) Notons ℓ la limite de f en $+\infty$.

Puisque $f+g$ est croissante $f+g \xrightarrow{+\infty} \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $\ell' = +\infty$ alors $g \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. La démarche du a., montre l'impossibilité de ceci.

Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors la démarche du a., permet de conclure.

Exercice 9 : [énoncé]

Posons $\ell = \lim_{+\infty} f$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(x) = f(x+nT)$.

Quand $n \rightarrow +\infty$, $x+nT \rightarrow +\infty$ et donc $f(x+nT) \rightarrow \ell$.

Or $f(x+nT) = f(x) \rightarrow f(x)$ donc par unicité de la limite $\ell = f(x)$.

Finalement f est constante.

Exercice 10 : [énoncé]

L'application $x \mapsto \lim_{x^+} f$ est bien définie car f est croissante ce qui assure l'existence de $\lim_{x^+} f$.

Soient $x, y \in]a, b[$ tels que $x < y$.

Pour $t \in]x, y[$, on a $f(t) \leq f(y)$. Quand $t \rightarrow x^+$, on obtient $\lim_{x^+} f \leq f(y)$ or $f(y) \leq \lim_{y^+} f$ donc $\lim_{x^+} f \leq \lim_{y^+} f$.

Exercice 11 : [énoncé]

Par opération f est continue sur chaque $I_k =]k, k + 1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Il reste à étudier la continuité en $a \in \mathbb{Z}$.

Quand $x \rightarrow a^+$: $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \rightarrow a = f(a)$ car $E(x) \rightarrow a$.

Quand $x \rightarrow a^-$: $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \rightarrow a - 1 + 1 = a = f(a)$ car $\lfloor x \rfloor \rightarrow a - 1$.

Par continuité à droite et à gauche, f est continue en a .

Finalement f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 12 : [énoncé]

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Cas $a \notin \mathbb{Z}$.

Au voisinage de a ,

$$f(x) = \lfloor a \rfloor + (x - \lfloor a \rfloor)^2$$

donc f est continue en a .

Cas $a \in \mathbb{Z}$.

Quand $x \rightarrow a^+$, $f(x) \rightarrow a = f(a)$.

Quand $x \rightarrow a^-$, $f(x) \rightarrow a - 1 + (a - (a - 1))^2 = a = f(a)$.

Donc f est continue en a . Finalement f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 13 : [énoncé]

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Il existe une suite (u_n) de nombres rationnels et une suite (v_n) de nombres irrationnels telles que $u_n, v_n \rightarrow a$.

On a $f(u_n) = 1 \rightarrow 1$ et $f(v_n) = 0 \rightarrow 0$ donc f n'a pas de limite en a et est donc discontinu en a .

Exercice 14 : [énoncé]

Soit $a \in \mathbb{R}^{+\star}$.

Puisque f est croissante $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existent, sont finies et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Puisque $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x}$ existent, sont finies et $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(a)}{a} \leq \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x}$.

Par opérations sur les limites $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ donc $\frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq \frac{1}{a} f(a) \leq \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ car $a > 0$.

Par suite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et donc f est continue.

Exercice 15 : [énoncé]

$\sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2} |f(x) - g(x)| + \frac{1}{2} (f(x) + g(x))$ est continue par opérations.

Exercice 16 : [énoncé]

La suite (u_n) avec $u_n = \frac{x^n}{n!}$ converge vers 0 donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ existe dans \mathbb{R} .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$

Pour $n \geq \lfloor x \rfloor$ on a $n+1 \geq x$ donc $u_{n+1} \leq u_n$.

Pour $n < \lfloor x \rfloor$ on a $n+1 \leq x$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.

Par suite

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}$$

f est clairement continue en tout $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et continue à droite en tout $a \in \mathbb{N}$. Reste à étudier la continuité à gauche en $a \in \mathbb{N}^\star$.

Quand $x \rightarrow a^-$:

$$f(x) = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!} = \frac{x^{a-1}}{(a-1)!} \rightarrow \frac{a^{a-1}}{(a-1)!} = \frac{a^a}{a!} = f(a)$$

Finalement f est continue.

Exercice 17 : [énoncé]

Puisque $\lim_{-\infty} f = -1$, f prend des valeurs négatives, puisque $\lim_{+\infty} f = 1$, f prend des valeurs positives.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre celles-ci, f s'annule.

Exercice 18 : [énoncé]

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$. Un point fixe de f est une valeur d'annulation de φ .

φ est continue, $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule.

Exercice 19 : [énoncé]

Dans les deux études, on introduit $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ définie et continue sur $[a, b]$.

L'objectif est de montrer que φ s'annule

a) Si $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors $f(a) \in [a, b]$ et donc $\varphi(a) = f(a) - a \geq 0$.

De même $\varphi(b) \leq 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'alors φ s'annule.

b) Si $[a, b] \subset f([a, b])$ alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = a$. On a alors $\varphi(\alpha) = a - \alpha \leq 0$.

De même en introduisant β tel que $f(\beta) = b$, on a $\varphi(\beta) \geq 0$ et l'on peut à nouveau affirmer que la fonction continue φ s'annule.

Exercice 20 : [énoncé]

Unicité : Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. g est strictement décroissante donc injective et ne peut donc s'annuler qu'au plus une fois.

Existence : Par l'absurde, puisque g est continue, si elle ne s'annule pas elle est strictement positive ou négative.

Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ alors $f(x) > x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim_{+\infty} f = \inf_{\mathbb{R}} f$.

Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$ alors $f(x) < x \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} -\infty$ ce qui est absurde puisque $\lim_{-\infty} f = \sup_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 21 : [énoncé]

Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ convient.

Sinon, considérons

$$g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

La fonction g est définie et continue sur \mathbb{R}^{+*} .

Puisque $f(0) > 0$, par opérations sur les limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$.

Puisque g est continue et qu'elle prend des valeurs inférieures et supérieures à 1, on peut affirmer par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $g(\alpha) = 1$ d'où $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 22 : [énoncé]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ continue.

Par l'absurde : Si f n'est pas constante alors il existe $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$.

Soit y un nombre non entier compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et donc f n'est pas à valeurs entière. Absurde.

Exercice 23 : [énoncé]

Posons $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(x)/g(x)$$

φ est continue et

$$\forall x \in I, |\varphi(x)| = 1$$

Montrons que φ est constante égale à 1 ou -1 ce qui permet de conclure.

Par l'absurde, si φ n'est pas constante égale à 1 ni à -1 alors il existe $a, b \in I$ tel que $\varphi(a) = 1 \geq 0$ et $\varphi(b) = -1 \leq 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule. Absurde.

Exercice 24 : [énoncé]

Pour a assez grand, $|f(x)| \geq 1$ sur $[a, +\infty[$ donc f ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.

Etant continue, f est alors de signe constant sur $[a, +\infty[$ et la relation $f = \pm |f|$ permet alors de conclure.

Exercice 25 : [énoncé]

Si $p = q = 0$, n'importe quel c fait l'affaire.

Sinon posons

$$y = \frac{pf(a) + qf(b)}{p + q}$$

Si $f(a) \leq f(b)$ alors

$$f(a) = \frac{pf(a) + qf(a)}{p + q} \leq y \leq \frac{pf(b) + qf(b)}{p + q} = f(b)$$

Si $f(b) \leq f(a)$ alors, comme ci-dessus $f(b) \leq y \leq f(a)$.

Dans les deux cas, y est une valeur intermédiaire à $f(a)$ et $f(b)$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Exercice 26 : [énoncé]

Posons $\varphi : [0, 1 - 1/n] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(x + 1/n) - f(x)$$

La fonction φ est continue.

Si φ est de signe strictement constant alors

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} f((k+1)/n) - f(k/n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k/n)$$

ne peut être nul.

Puisque φ prend une valeur positive et une valeur négative, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule.

Exercice 27 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons que $f - g$ ne s'annule pas. Quitte à échanger, supposons $f - g > 0$.

Soit x un point fixe de g .

On a $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$. Donc $f(x)$ est point fixe de g et de plus $f(x) > g(x) = x$.

De même, $f^2(x)$ est point fixe de g et $f^2(x) \geq f(x)$.

On peut ainsi construire une suite $(f^n(x))$ de points fixes de g , suite qui est croissante et majorée.

Posons $\ell = \lim f^n(x)$. On a par continuité : $f(\ell) = \ell$ et $g(\ell) = \ell$. Absurde.

Exercice 28 : [énoncé]

La fonction φ est continue, $\varphi(0) = f(x_1) - f(y_1) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(x_2) - f(y_2) \leq 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule en un certain t .

Posons $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ et $y_0 = (1-t)y_1 + ty_2$.

$\varphi(t) = 0$ donne $f(x_0) = f(y_0)$ or $x_0 < y_0$ donc f n'est pas injective. Absurde.

Exercice 29 : [énoncé]

Notons f l'application étudiée. Pour $z = \rho e^{i\alpha}$, on a

$$f(z) = \rho e^{\rho \cos \alpha} e^{i(\alpha + \rho \sin \alpha)}$$

Soit $Z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ avec $r \geq 0$.

Si $r = 0$ alors $Z = 0 = f(0)$.

Si $r > 0$, pour que $z = \rho e^{i\alpha}$ vérifie $f(z) = Z$, il suffit de trouver (ρ, α) solution du système

$$\begin{cases} \rho e^{\rho \cos \alpha} = r \\ \alpha + \rho \sin \alpha = \theta \end{cases}$$

Nous alors chercher un couple (ρ, α) solution avec $\rho > 0$ et $\alpha \in]0, \pi[$.

Quitte à considérer un nouvel argument θ pour le complexe Z , nous supposons $\theta > \pi$.

On a alors

$$\begin{cases} \rho e^{\rho \cos \alpha} = r \\ \alpha + \rho \sin \alpha = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\alpha) = r \\ \rho = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

avec

$$g(\alpha) = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} e^{\frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha}$$

La fonction g est définie et continue sur $]0, \pi[$.

Quand $\alpha \rightarrow 0^+$, $g(\alpha) \rightarrow +\infty$ et quand $\alpha \rightarrow \pi^-$, $g(\alpha) \rightarrow 0^+$.

Par suite, il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que $g(\alpha) = r$ et alors, pour $\rho = \frac{\theta - \alpha}{\sin \alpha}$, on obtient

$$f(\rho e^{i\alpha}) = r e^{i\theta} = Z$$

Finalement f est surjective.

Exercice 30 : [énoncé]

Soit $T > 0$ une période de f .

Sur $[0, T]$, f est bornée par un certain M car f est continue sur un segment.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - nT \in [0, T]$ pour $n = E(x/T)$ donc

$$|f(x)| = |f(x - nT)| \leq M.$$

Ainsi f est bornée par M sur \mathbb{R} .

Exercice 31 : [énoncé]

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(g(x))| \leq M$ donc $f \circ g$ est bornée.

Puisque la fonction g est continue sur le segment $[-M, M]$, elle y est bornée par un certain M' .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(f(x))| \leq M'$ car $f(x) \in [-M, M]$ ainsi $g \circ f$ est bornée.

Exercice 32 : [énoncé]

Posons $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = g(x) - f(x)$$

φ est continue sur le segment $[a, b]$ donc φ admet un minimum en un certain $c \in [a, b]$.

Posons $\alpha = \varphi(c) = g(c) - f(c) > 0$. Pour tout $x \in [a, b]$, $\varphi(x) \geq \alpha$ donc $f(x) \leq g(x) - \alpha$.

Exercice 33 : [énoncé]

Posons $M = f(0) + 1$.

Puisque $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \leq A, f(x) \geq M \text{ et } \forall x \geq B, f(x) \geq M$$

On a $A \leq 0 \leq B$ car $f(0) < M$.

Sur $[A, B]$, f admet un minimum en un point $a \in [A, B]$ car continue sur un segment.

On a $f(a) \leq f(0)$ car $0 \in [A, B]$ donc $f(a) \leq M$.

Pour tout $x \in [A, B]$, on a $f(x) \geq f(a)$ et pour tout $x \in]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$, $f(x) \geq M \geq f(a)$.

Ainsi f admet un minimum absolu en a .

Exercice 34 : [énoncé]

Soit y une valeur prise par f . Si celle-ci n'a qu'un antécédent, c'est fini.

Sinon, soit $a < b$ les deux seuls antécédents de y .

f est continue sur $[a, b]$ donc f admet un minimum en c et un maximum en d , l'un au moins n'étant pas en une extrémité de $[a, b]$. Supposons que cela soit c .

Si $f(c)$ possède un autre antécédent c' que c .

Si $c' \in [a, b]$ alors f ne peut être constante entre c et c' et une valeur strictement comprise entre $f(c) = f(c')$ et $\max_{[c, c']} f$ possède au moins 3 antécédents.

Si $c' \notin [a, b]$ alors une valeur strictement intermédiaire à y et $f(c)$ possède au moins 3 antécédents. Impossible.

Exercice 35 : [énoncé]

a) Puisque f est T -périodique, on a

$$\text{Im}f = f(\mathbb{R}) = f([0, T])$$

Or f est continue, donc $f([0, T])$ est bornée et donc $\text{Im}f$ aussi.

b) Plus précisément $f([0, T])$ est un segment de la forme $[f(a), f(b)]$ avec $a, b \in [0, T]$.

Pour fixer les idées, supposons $a \leq b$. On a $b \in [a, T] \subset [a, a+T]$.

Si $b \in [a, a+T/2]$ alors $f(a), f(b) \in f([a, a+T/2])$ et donc pour $x = a$

$$\text{Im}f = f([x, x+T/2])$$

Si $b \in [a+T/2, a+T]$ alors $x = a+T/2$ convient.

Le raisonnement dans le cas $b \leq a$ est analogue.

Exercice 36 : [énoncé]

Si la fonction f est constante, l'affaire est entendue.

Si f n'est pas constante elle admet un minimum ou un maximum global dans $]a, b[$.

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer qu'il s'agit d'un maximum en $c \in]a, b[$.

Posons alors $\alpha = \min \{c-a, b-c\} > 0$ et considérons $\sigma \in [0, \alpha]$.

Considérons enfin $g : x \mapsto f(x+\sigma) - f(x)$ définie et continue sur $[a, b-\sigma]$.

On a $g(c) \leq 0$ et $g(c-\sigma) \geq 0$ car f est maximale en c .

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que g s'annule ce qui résout le problème posé.

Exercice 37 : [énoncé]

Soit $\varepsilon = 1 > 0$. Il existe $A \in [0, +\infty[$ tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[, |f(x) - \ell| \leq 1$$

Ainsi, la fonction f est bornée par $M_1 = |\ell| + 1$ sur $[A, +\infty[$. Aussi, f est continue sur le segment $[0, A]$, elle est donc aussi bornée sur $[0, A]$ par un certain M_2 .

Finalement, f est bornée sur $[0, +\infty[$ par $M = \max(M_1, M_2)$.

Exercice 38 : [énoncé]

a) Sur $[0, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

est continue et strictement croissante, $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 1$.

Ainsi f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, 1[$.

Sur $]-\infty, 0[$,

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

est continue et strictement croissante, $\lim_{0^+} f = 0$ et $\lim_{-\infty} f = -1$.

Ainsi f réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ vers $]-1, 0[$.

Finalement, f réalise une bijection de \mathbb{R} vers $]-1, 1[$.

b) Pour $y \in [0, 1[$, son antécédent $x = f^{-1}(y)$ appartient à $[0, +\infty[$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

Pour $y \in]-1, 0[$, son antécédent $x = f^{-1}(y)$ appartient à $]-\infty, 0[$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

Finalement,

$$\forall y \in]-1, 1[, f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

Exercice 39 : [énoncé]

Notons que $\lim_a f$ et $\lim_b f$ existent car f est croissante.

(\Rightarrow) Supposons f continue.

Puisque f est continue et strictement croissante, f réalise une bijection de $]a, b[$

sur $\left] \lim_a f, \lim_b f \right[$ d'où le résultat.

(\Leftarrow) Supposons $f(]a, b[) = \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$.

Soit $x_0 \in]a, b[$. On a $\lim_a f < f(x_0) < \lim_b f$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $y^+ \in]f(x_0), f(x_0) + \varepsilon[\cap \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$. Il existe $x^+ \in]a, b[$

tel que $f(x^+) = y^+$.

Soit $y^- \in [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0)[\cap \left] \lim_a f, \lim_b f \right[$. Il existe $x^- \in]a, b[$ tel que

$f(x^-) = y^-$.

Puisque f est croissante, $x^- < x_0 < x^+$. Posons $\alpha = \min(x^+ - x_0, x_0 - x^-) > 0$.

Pour tout $x \in]a, b[$, si $|x - x_0| \leq \alpha$ alors $x^- \leq x \leq x^+$ donc $y^- \leq f(x) \leq y^+$ d'où $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Ainsi f est continue en x_0 puis f continue sur $]a, b[$.

Exercice 40 : [énoncé]

a) Cherchons f de la forme

$$f(x) = e^{\beta x}$$

Après calculs, si $\alpha = \beta e^{-\beta}$ alors f est solution.

En étudiant les variations de la fonction $\beta \mapsto \beta e^{-\beta}$, on peut affirmer que pour tout $\alpha \in [0, 1/e]$, il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$ tel que $\beta e^{-\beta} = \alpha$ et donc il existe une fonction f vérifiant la relation précédente.

b) Pour $\alpha = 1/e$, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x e^x$ sont solutions.

Notons que pour $\alpha \in]0, 1/e[$ il existe aussi deux solutions linéairement indépendantes car l'équation $\beta e^{-\beta} = \alpha$ admet deux solutions, une inférieure à 1 et l'autre supérieure à 1

Exercice 41 : [énoncé]

La fonction f est bijective et continue donc strictement monotone. Elle ne peut être décroissante car alors elle ne serait pas surjective sur $[0, +\infty[$, elle est donc strictement croissante.

S'il existe un $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) < x$ alors, par stricte croissance

$$f(f(x)) < f(x)$$

et donc $f(f(x)) < x$ ce qui contredit $f \circ f = \text{Id}$. De même $f(x) > x$ est impossible et donc $f = \text{Id}$.

Exercice 42 : [énoncé]

On a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

Par récurrence, on montre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $x/2^n \rightarrow 0$ et donc par continuité de f en 0

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$$

Or

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

donc par unicité de la limite $f(x) = f(0)$.

Finalement f est constante égale à $f(0)$.

Exercice 43 : [énoncé]

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$$

donc f est paire.

Pour tout $x > 0$, $x^{1/2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ donc $f(x^{1/2^n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(1)$ par continuité de f en 1.

Or

$$f(x^{1/2^n}) = f(x^{1/2^{n-1}}) = \dots = f(x)$$

donc $f(x) = f(1)$ pour tout $x > 0$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par parité.

De plus $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)$$

Exercice 44 : [énoncé]

Soient $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

Si $x \geq 1$ alors on montre par récurrence que (u_n) est décroissante et supérieure à 1.

Si $x \leq 1$ alors on montre par récurrence que (u_n) est croissante et inférieure à 1.

Dans les deux cas la suite (u_n) converge vers 1.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(u_n)$ donc à la limite $f(x) = f(1)$.

Exercice 45 : [énoncé]

Soit f solution.

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Or

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \dots \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \sin x$$

donc

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \frac{\sin x}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Pour $x \neq 0$, quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$ puis

$$f(x) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \rightarrow \frac{\sin x}{x} f(0)$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

(avec prolongement par continuité par 1 en 0).

Vérification : ok.

Exercice 46 : [énoncé]

a) Pour $x = y = 0$, la relation donne $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.

Pour $y = -x$, la relation donne $f(0) = f(x) + f(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$.

b) Par récurrence, on montre pour $n \in \mathbb{N}$: $f(nx) = nf(x)$.

Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on écrit $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

On a alors $f(nx) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$.

c) Soit $r \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

$$f(r) = pf(1/q) = \frac{p}{q} q f(1/q) = \frac{p}{q} f(1) = ar.$$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite (u_n) telle que $u_n \rightarrow x$ et $u_n \in \mathbb{Q}$.

Par continuité $f(u_n) \rightarrow f(x)$ or puisque $u_n \in \mathbb{Q}$ $f(u_n) = au_n \rightarrow ax$ donc par unicité de la limite $f(x) = ax$.

Exercice 47 : [énoncé]

La relation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ permet d'établir

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$$

Pour cela on commence par établir

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(na) = nf(a)$$

On commence par établir le résultat pour $n = 0$ en exploitant

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

ce qui entraîne $f(0) = 0$.

On étend ensuite le résultat à $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence et en exploitant

$$f((n+1)a) = f(na) + f(a)$$

On étend enfin le résultat à $n \in \mathbb{Z}$ en exploitant la propriété de symétrie

$f(-x) = -f(x)$ issu de

$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0$$

Considérons alors $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$f(r) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) \text{ et } f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$$

donc

$$f(r) = \frac{p}{q} f(1) = rf(1)$$

Nous allons étendre cette propriété à $x \in \mathbb{R}$ par un argument de continuité.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut affirmer qu'il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x$. Pour celle-ci, on a $x_n + x_0 - x \rightarrow x_0$ et donc par continuité de f en x_0

$$f(x_n + x_0 - x) \rightarrow f(x_0)$$

Or on a aussi

$$f(x_n + x_0 - x) = f(x_0) + (f(x_n) - f(x))$$

donc

$$f(x_n) - f(x) \rightarrow 0$$

Ainsi

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = xf(1)$$

Finalement, la fonction f est linéaire.

Exercice 48 : [énoncé]

a) $f(2-x) + f(x) = 0$ et $f(-x) + f(x) = 0$ donc $f(x) = f(x+2)$ donc f est périodique.

$f(x/2) = f(x)/2$ donc $f(2x) = 2f(x)$.

Puisque f est continue et périodique, f est bornée. Or la relation $f(2x) = 2f(x)$ implique que f n'est pas bornée dès qu'elle prend une valeur non nulle. Par suite f est nulle.

b) Pour $a = f(1) - f(0)$ et $b = f(0)$, on observe que $g(x) = f(x) - (ax + b)$ est solution du problème posé et s'annule en 0 et 1 donc g est nulle et f affine. La réciproque est immédiate.

Exercice 49 : [énoncé]

a) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(0)) = \frac{1}{2}f(x)$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x+y)$$

On en déduit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

b) Sachant f continue, on peut alors classiquement conclure que dans le cas précédent f est de la forme $x \mapsto ax$.

Dans le cas général, il suffit de considérer $x \mapsto f(x) - f(0)$ et de vérifier que cette nouvelle fonction satisfait toujours la propriété initiale tout en s'annulant en 0.

On peut donc conclure que dans le cas général f est affine : $x \mapsto ax + b$

Exercice 50 : [énoncé]

Par formule de factorisation

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leqslant 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leqslant 2 \frac{|x-y|}{2} = |x-y|$$

donc \sin est 1 lipschitzienne.

Exercice 51 : [énoncé]

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $|u_n| \leqslant k^n |a|$.

Pour $n = 0$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 0$.

$$|u_{n+1}| = |f(u_n) - f(0)| \leqslant k |u_n - 0| = k |u_n| \stackrel{HR}{\leqslant} k^{n+1} |a|$$

Récurrence établie.

Puisque $k \in [0, 1[$, $k^n \rightarrow 0$ et donc $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 52 : [énoncé]

L'application $x \mapsto f(x) + tg(x)$ est définie et continue sur le segment $[0, 1]$ elle y est donc bornée et atteint ses bornes. Par suite $\varphi(t)$ est bien définie et plus précisément, il existe $x_t \in [0, 1]$ tel que $\varphi(t) = f(x_t) + tg(x_t)$.

Puisque g est continue sur $[0, 1]$ elle y est bornée par un certain M :

On a

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = f(x_t) + tg(x_t) - (f(x_\tau) + \tau g(x_\tau))$$

or

$$f(x_t) + \tau g(x_t) \leqslant f(x_\tau) + \tau g(x_\tau)$$

donc

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) \leqslant tg(x_t) - \tau g(x_t) = (t - \tau)g(x_t) \leqslant M |t - \tau|$$

De même

$$\varphi(\tau) - \varphi(t) \leqslant M |t - \tau|$$

et finalement φ est M lipschitzienne.