

Intégrales dépendant d'un paramètre

Convergence dominée

Exercice 1 [00921] [correction]

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \quad \text{b) } v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

Exercice 2 [03800] [correction]

Etudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} \, dx$$

Exercice 3 [00746] [correction]

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \quad \text{b) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} \quad \text{c) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1}$$

Exercice 4 [01771] [correction]

Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^2} \, dt$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 5 [00926] [correction]

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) \, dt$$

Exercice 6 [00927] [correction]

Etablir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Exercice 7 [02568] [correction]

Montrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^3)^n}$$

est définie pour $n \geq 1$.

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^3)^n}$$

En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 8 [03294] [correction]

Montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} \, dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \, dx$$

Exercice 9 [03807] [correction]

Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)}$$

est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Montrer que la suite de terme général $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 10 [02567] [correction]

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue.

On suppose que la fonction f converge en $+\infty$ vers une limite finie ℓ .

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) \, dt$$

Exercice 11 [02435] [correction]

Etudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n) dt$$

où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.**Exercice 12** [00150] [correction]Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt} dt$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.**Exercice 13** [00924] [correction]Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$$

Exercice 14 [03650] [correction]Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 intégrable ainsi que sa dérivée.a) Déterminer pour $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt) dt$$

b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 15 [04079] [correction]

Etudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

Exercice 16 [00922] [correction]

Etudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

Exercice 17 [00923] [correction]

Déterminer un équivalent de

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx$$

Exercice 18 [02982] [correction]

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} dx$$

Exercice 19 [00925] [correction]Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable.Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt$$

Exercice 20 [02862] [correction]

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx$$

Exercice 21 [03159] [correction]Soit F une application continue décroissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0 < h < \delta$.

a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n = \int_0^1 F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt$$

b) On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right)$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 22 [03362] [\[correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1}$$

a) Montrer que f_n est intégrable sur $]0, 1[$. On pose

$$J_n = \int_0^1 f_n(x) \, dx$$

b) Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

c) Montrer que

$$J_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 23 [02392] [\[correction\]](#)

Soit f une application réelle de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ avec $0 < a < 1 < b$ et $f(1) \neq 0$.

Soit (f_n) la suite de fonctions telle que

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1 + x^n}$$

a) Déterminer la limite simple de (f_n) .

b) Etablir l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) \, dt = \int_a^1 f(t) \, dt$$

c) Montrer que

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) \, dt \sim \frac{\ln 2}{n} f(1)$$

Exercice 24 [02517] [\[correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$$

Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} et nulle en dehors d'un segment $[a, b]$.

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) \, dx = g(0)$$

Exercice 25 [03013] [\[correction\]](#)

Existence et calcul de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} \, dt$$

Indice : utiliser une suite de fonctions judicieuse.

Intégration terme à terme**Exercice 26** [00928] [\[correction\]](#)

Montrer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 27 [03781] [\[correction\]](#)

Prouver l'égalité

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2} \, dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 28 [00929] [\[correction\]](#)

Etablir que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1 + t^2} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 29 [02864] [\[correction\]](#)

Existence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1 - t^2} \, dt$$

Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

Exercice 30 [00931] [\[correction\]](#)

a) Etablir

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} \, dt$$

a) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

b) Calculer cette somme sachant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 31 [00930] [correction]

a) Etablir

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Cette valeur est appelée constante de Catalan, elle vaut approximativement 0,916.

Exercice 32 [00940] [correction]

Etablir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Exercice 33 [02615] [correction]Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(m) = \int_0^1 x^n (\ln x)^m dx$$

a) Calculer $I_n(n)$.

b) En déduire

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$

Exercice 34 [00932] [correction]

Etablir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Exercice 35 [02869] [correction]

Montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t} dt$$

Exercice 36 [02570] [correction]Soient p et k 2 entiers naturels, non nul. Soit $f_{p,k} : x \mapsto x^p (\ln x)^k$.a) Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $[0, 1]$. Soit

$$K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k dx$$

b) Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.c) Exprimer $J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n dx$ en fonction de n .d) On pose $I = \int_0^1 x^x dx$. Montrer

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Exercice 37 [00934] [correction]Etablir que pour $p \geq 2$,

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x} dx = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

Exercice 38 [00933] [correction]

Etablir

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

Exercice 39 [03790] [correction]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f_n(x) = x^n(1 - \sqrt{x})$$

a) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}} \, dx$$

b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$$

Exercice 40 [03268] [correction]

Montrer

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos x} \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(n!)^2}$$

Exercice 41 [00943] [correction]

Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{2 + e^{i\theta}} \, d\theta$$

Exercice 42 [02439] [correction]

Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} \, dt$$

Exercice 43 [03214] [correction]

Montrer que

$$\forall a, b > 0, \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}$$

Exercice 44 [00935] [correction]

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} \, dx$$

Exercice 45 [00939] [correction]

Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n \, dt$$

a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.

b) Plus généralement, nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2, 3$.

Exercice 46 [02807] [correction]

a) Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer l'existence de

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{\binom{2n}{n}}$$

b) Calculer S_0 et S_{-1} .

c) Si $p \in \mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de S_p .

Exercice 47 [02641] [correction]

n désigne un entier naturel non nul.

a) Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} \, dx$$

est définie.

b) Soit $a \geq 0$. Calculer

$$\int_0^a \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

puis de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

c) Soit $a \geq 0$. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

converge uniformément sur $[0, a]$, puis que

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$$

d) En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$$

e) En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

est convergente et donner sa valeur.

Comparer avec le résultat obtenu en b). Qu'en conclure ?

Exercice 48 [02438] [correction]

a) Démontrer la convergence de la série de terme général

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

b) Comparer

$$a_n \text{ et } n \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt$$

c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1 - te^{-t})^2} dt$$

Exercice 49 [02445] [correction]

On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$$

pour tout entier $n > 0$.

- a) Trouver la limite ℓ de (I_n) .
- b) Donner un équivalent de $(\ell - I_n)$.
- c) Justifier

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

d) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n) .

Exercice 50 [02612] [correction]

a) Déterminer la limite ℓ quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$$

b) Donner un équivalent de

$$I_n - \ell$$

c) Justifier

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

d) En déduire un équivalent de

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

et donner un développement asymptotique à trois termes de I_n .

Exercice 51 [02840] [\[correction\]](#)

a) Si $(s, \lambda) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

pour $n \geq 0$? A λ fixé, on note Δ_λ l'ensemble des $s > 0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.

b) Calculer $\lim_{s \rightarrow \sup \Delta_\lambda} F_\lambda(s)$.

c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s \rightarrow \inf \Delta_\lambda$.

d) Si $n \geq 1$, calculer :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy$$

e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 52 [02866] [\[correction\]](#)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) dt$$

Exercice 53 [02870] [\[correction\]](#)

Si $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

Exercice 54 [00118] [\[correction\]](#)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \sin x \right) \right]^n dx$$

a) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 55 [03287] [\[correction\]](#)

Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos^{2n} t dt$$

Exercice 56 [02583] [\[correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Ensemble de définition de

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n}$$

b) Montrer que si $x > 1$, $\sum I_n(x)$ diverge.

c) Calculer $I_n(2)$ pour $n \geq 1$.

Exercice 57 [03844] [\[correction\]](#)

Donner la limite la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 58 [01102] [\[correction\]](#)

a) Donner les limites éventuelles en $+\infty$ des suites de termes généraux

$$U_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n} \text{ et } V_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

b) Quelle est la nature des séries

$$\sum_{n \geq 1} U_n \text{ et } \sum_{n \geq 1} V_n ?$$

Exercice 59 [02360] [\[correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n l'application définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2\sin(x)}{e^{nx}-1} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Pour quelle valeurs de α la fonction f_n est-elle continue ?
Dans la suite, on prendra cette valeur de α .
b) Montrer que f_n est bornée.
c) Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ existe pour $n \geq 2$.
d) Exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ comme la somme d'une série.

Exercice 60 [02609] [correction]

Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

- a) Déterminer la limite de la suite (I_n) .
b) Etablir que pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$$

- c) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'il y ait convergence de la suite de terme général

$$u_n = \ln(n^\alpha I_n)$$

- d) En déduire la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} I_n$$

et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

Intégration terme à terme par les sommes partielles

Exercice 61 [00936] [correction]

Montrer que, pour $a > 0$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

Exercice 62 [00942] [correction]

Pour tout $\alpha > 0$, établir que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Exercice 63 [02863] [correction]

- a) Etablir pour $a, b > 0$ l'égalité

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

- b) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 64 [02437] [correction]

Montrer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Exercice 65 [02867] [correction]

Soit (a_n) une suite croissante de réels > 0 telle que $a_n \rightarrow +\infty$.

Justifier

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

Etude de fonctions concrètes

Exercice 66 [00534] [correction]

- a) Justifier que l'intégrale suivante est définie pour tout $x > 0$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

- b) Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.

- c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.

- d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 67 [03658] [correction]

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$$

- a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \geq 0$.
 b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty[$.
 c) Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 68 [00538] [correction]

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Exercice 69 [00537] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

- a) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .
 b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 70 [00532] [correction]

Soit

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} dt$$

- a) Calculer $g(0)$ en réalisant le changement de variable $t = 1/u$.
 b) Etudier les variations de g sur son domaine de définition.
 c) Etudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 71 [00531] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$$

- a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^+ .
 b) A l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.
 c) Montrer que f est continue et décroissante.
 d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 72 [03313] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta$$

- a) Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
 b) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.
 c) Montrer que f est développable en série entière sur \mathbb{R} .
 d) Exploiter l'équation différentielle précédente pour former ce développement.

Exercice 73 [00533] [correction]

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt$$

- a) Montrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Etudier les variations de f .
 b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
 c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 74 [00536] [correction]Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt$$

- a) Montrer que f est définie et positive sur $]-1, +\infty[$.
 b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et préciser sa monotonie.
 c) Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
 d) On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

- e) Déterminer un équivalent à f en -1^+ .

Exercice 75 [02878] [correction]

- a) Pour quels x de \mathbb{R} l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$$

existe-t-elle ? Dans ce cas, soit $f(x)$ sa valeur.

- b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur son intervalle de définition.
c) Que dire de la fonction

$$x \mapsto (x+1)f(x)f(x+1) ?$$

Exercice 76 [02880] [correction]

Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt$$

Exercice 77 [02875] [correction]

Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t} dt$$

- a) Montrer que f est définie et continue sur Ω .
b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1 .
c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty$.

Exercice 78 [02871] [correction]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$$

- a) Définition de f .
b) Continuité et dérivabilité de f .
c) Ecrire $f(1)$ comme somme de série.

Exercice 79 [02882] [correction]

On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et trouver des équivalents simples de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 80 [03324] [correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2-t^2}}$$

- a) Montrer que f est définie et continue.
b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 81 [03621] [correction]

- a) Déterminer le domaine de définition de

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t} dt$$

- b) Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 82 [03760] [correction]

- a) Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}$$

- b) Donner la limite de f en $x = 1$.

Exercice 83 [03736] [correction]

On pose

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$$

- a) Etudier l'ensemble de définition de f .
b) Donner un équivalent de f en 0.
c) Montrer que le graphe de f admet une symétrie d'axe $x = 1/2$.
d) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
e) Calculer la borne inférieure de f .

Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 84 [02556] [correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt$$

- a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
 b) Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de

$$G(x) = F(x) + F(1/x)$$

- c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \frac{\ln t}{t^2 + 2t\ln(\theta) + 1} dt$$

Exercice 85 [03887] [correction]

- a) Montrer la continuité de l'application définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

- b) Préciser ses limites en 0 et $+\infty$.

Exercice 86 [03889] [correction]

Soit

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$$

Montrons que g est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle

$$-y' + y = \frac{1}{x}$$

Calcul de fonction intégrale

Exercice 87 [00545] [correction]

On considère la fonction

$$g : x \in]-1, +\infty[\mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$$

- a) Montrer que la fonction g est bien définie.
 b) Justifier que la fonction est de classe \mathcal{C}^1 et exprimer $g'(x)$.
 c) En déduire une expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles

Exercice 88 [02874] [correction]

Etudier

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$$

Exercice 89 [03888] [correction]

- a) Montrer que l'application $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t} dt$ est définie sur $]-1, +\infty[$.

- b) Justifier que g est de classe \mathcal{C}^1 et calculer $g'(x)$.

- c) En déduire une expression simple de $g(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 90 [00546] [correction]

- a) Justifier l'existence et calculer

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$$

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

- b) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Calculer $F'(x)$.

- c) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 91 [02873] [correction]

Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

Exercice 92 [00553] [correction]

Soit

$$F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt \text{ avec } x, y > 0$$

Pour $y > 0$, montrer que $x \mapsto F(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et calculer

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$$

En déduire la valeur de $F(x, y)$.

Exercice 93 [02611] [correction]

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt) dt$$

- a) Quel est le domaine de définition réel I de la fonction F ?
 b) Justifier que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
 c) Exprimer $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 94 [03311] [correction]Soient a, b deux réels strictement positifs.

- a) Justifier l'existence pour tout
- $x \in \mathbb{R}$
- de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$$

- b) Justifier que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $F'(x)$.
 c) Exprimer $F(x)$

Exercice 95 [00548] [correction]

On pose

$$z : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt$$

et on donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

- a) Justifier et calculer $z(0)$.
 b) Montrer que z est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$$

- c) En déduire l'expression de
- $z(x)$
- .

Exercice 96 [03655] [correction]

En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{tx} dt$$

Exercice 97 [03656] [correction]

- a) Existence de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$$

- b) Calculer $F(x)$ en introduisant une équation différentielle vérifiée par F .
 c) Calculer $F(x)$ directement par une intégration terme à terme.

Exercice 98 [00555] [correction]

Ensemble de définition, dérivée et valeur de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 99 [03660] [correction]Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)) dt$$

- a) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
 b) Calculer $F'(x)$ et en déduire un expression de $F(x)$.

Exercice 100 [02881] [correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x \cos t)}{\cos t} dt$$

Exercice 101 [00556] [correction]

Soit

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+x \sin^2 t) dt \text{ sur } [0, +\infty[$$

- a) Justifier que F est bien définie et continue.
 b) Etudier la dérivable sur $[0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée via le changement de variable $u = \tan t$.
 c) Etablir que

$$F(x) = \pi(\ln(1 + \sqrt{1+x}) - \ln 2)$$

Exercice 102 [02876] [\[correction\]](#)

Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + t^2)}{1 + t^2} dt$$

Exercice 103 [00551] [\[correction\]](#)

Soit

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + 2t \cos x + t^2)}{t} dt$$

- a) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$
 b) Calculer $F'(x)$ sur $[0, \pi/2]$
 c) Donner la valeur de $F(0)$ puis celle de $F(x)$ sachant

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 104 [00552] [\[correction\]](#)Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^n}$$

- a) Justifier l'existence de $I_n(x)$.
 b) Calculer $I_1(x)$.
 c) Justifier que $I_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 et exprimer $I'_n(x)$.
 d) Exprimer $I_n(x)$.

Exercice 105 [03323] [\[correction\]](#)Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt$$

- a) Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R} .
 b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
 c) Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]0, +\infty[$.
 d) En déduire une expression simple de F sur \mathbb{R} .

Exercice 106 [03619] [\[correction\]](#)Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1 + t^2)} dt$$

- a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .

On admet l'identité

$$\frac{x^2 - 1}{(1 + x^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{x^2}{1 + x^2 t^2} - \frac{1}{1 + t^2}$$

valable pour tout x et t dans \mathbb{R}

- b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

Etude théorique**Exercice 107** [00540] [\[correction\]](#)Soit f une application continue de $\mathbb{R} \times [a, b]$ dans \mathbb{R} .Expliquer pourquoi f est uniformément continue sur $S \times [a, b]$ pour tout segment S de \mathbb{R} .En déduire que $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur \mathbb{R} .Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \int_0^1 e^{xt} dt$. A l'aide de la question précédente, étudier la continuité de g . Retrouver le résultat en calculant $g(x)$.**Exercice 108** [00544] [\[correction\]](#)Soient $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Montrer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$$

Exercice 109 [03756] [\[correction\]](#)Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant $f(0) = 0$.

Montrer que la fonction

$$g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et exprimer ses dérivées successives en 0 en fonction de celles de f .

Exercice 110 [00294] [\[correction\]](#)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0$$

a) Montrer qu'on a pour tout $x \in I$

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(t) dt$$

b) En déduire qu'on peut écrire $f(x) = (x-a)^\alpha g(x)$ avec g de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Transformée de Fourier et intégrales apparentées

Exercice 111 [00547] [\[correction\]](#)

On pose

$$z : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t^2} dt$$

a) Montrer que z est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et vérifie

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$$

b) En déduire l'expression de $z(x)$ sachant $z(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 112 [00549] [\[correction\]](#)

En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{itx} dt$$

Exercice 113 [03211] [\[correction\]](#)

On considère

$$\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

a) Montrer la définition et la continuité de φ sur \mathbb{R} .

b) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et montrer que

$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2} dt$$

c) Montrer que pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = i \int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} du$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

d) La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 114 [02499] [\[correction\]](#)

On étudie

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

a) Donner le domaine de définition de f .

b) Calculer f en formant une équation différentielle.

c) Calculer f en exploitant le développement en série entière de la fonction cosinus.

Exercice 115 [00554] [\[correction\]](#)

Existence et calcul de

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

sachant $g(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Fonction d'Euler

Exercice 116 [00560] [\[correction\]](#)

Démontrer que la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 117 [00561] [\[correction\]](#)

a) Démontrer que la fonction Γ donnée par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Démontrer que la fonction Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

c) En exploitant l'inégalité de Cauchy Schwarz, établir que la fonction $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ est convexe.

Exercice 118 [00562] [\[correction\]](#)

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

a) Montrer que pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq e \cdot e^{-t}$$

b) Etablir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

c) Observer que

$$\int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du$$

d) Conclure que

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Exercice 119 [02635] [\[correction\]](#)

On rappelle $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

a) Montrer que cette fonction est définie et indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

On étudiera la régularité en se restreignant à $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$.

b) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) En réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n+1)$ en

$$\frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy$$

où $f_n(y) = 0$ pour $y \leq -\sqrt{n}$, $0 \leq f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{n} < y \leq 0$ et $0 \leq f_n(y) \leq (1+y)e^{-y}$ pour $y > 0$ et $t \geq n$.

d) En appliquant le théorème de convergence dominée établir la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$$

Exercice 120 [02537] [\[correction\]](#)

a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

b) Calculer l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

c) Expliquer rapidement pourquoi $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Exercice 121 [00941] [\[correction\]](#)

Etablir que pour tout $x > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

Applications au calcul d'intégrales

Exercice 122 [00535] [\[correction\]](#)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

- a) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $f'(x)$.
 b) Calculer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 c) On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$. Montrer

$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

- d) Conclure

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 123 [03654] [correction]

L'objectif de ce sujet est de calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} dt$$

- a) Justifier que la fonction F est bien définie
 b) Déterminer une équation linéaire d'ordre 1 dont F est solution sur $]0, +\infty[$.
 c) Calculer $F(0)$ et la limite de F en $+\infty$.
 d) En déduire la valeur de I .

Exercice 124 [02638] [correction]

On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

- a) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
 b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F''(x)$.
 c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Exercice 125 [00542] [correction]

- a) Justifier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

- b) Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt$$

Déterminer la limite de F en $+\infty$.

- c) Justifier que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer F' .
 d) En admettant la continuité de F en 0 déterminer la valeur de I .

Exercice 126 [00543] [correction]

Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \geq 0$, on pose $f(x, t) = e^{-xt} \text{sinc}(t)$ où sinc (lire sinus cardinal) est la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x, t) dt$$

- a) Montrer que $u_n(x) = (-1)^n \int_0^\pi g_n(x, u) du$ avec $g_n(x, u)$ qu'on explicitera.
 b) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .
 c) On pose $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Justifier que U est continue et expliciter U sous la forme d'une intégrale convergente.
 d) Montrer que U est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $U'(x)$.
 e) Expliciter $U(x)$ pour $x > 0$ puis la valeur de

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Exercice 127 [02872] [correction]

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$$

- a) Justifier la définition de $f(x)$.
 b) Montrer que f est classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
 c) Calculer $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^{+\star}$.
 d) Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

Exercice 128 [00541] [\[correction\]](#)

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$$

- a) Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

- b) Montrer que f et g sont continues en 0

- c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 129 [00550] [\[correction\]](#)

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$$

- a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .

- b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

- c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{t^2} dt$$

Exercice 130 [03312] [\[correction\]](#)

- a) Montrer que pour tout $x > -1$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt = \frac{\ln 2}{2} \arctan x + \frac{\pi}{8} \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$$

- b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

A chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

a) Sur $[0, \pi/4[$, $\tan^n x \xrightarrow{CVS} 0$ $|\tan^n x| \leq 1 = \varphi(x)$ intégrable sur $[0, \pi/4[$ donc

$$u_n \rightarrow \int_0^{\pi/4} 0 \, dx = 0$$

b) Sur $[0, +\infty[$, $\frac{1}{x^n + e^x} \xrightarrow{CVS} f(x)$ avec $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, 1[$ et $f(x) = 0$ sur $]1, +\infty[$.

De plus $\left| \frac{1}{x^n + e^x} \right| \leq e^{-x} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$ donc

$$v_n \rightarrow \int_0^1 e^{-x} \, dx = \frac{e-1}{e}$$

Exercice 2 : [énoncé]

En découplant l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \, dx$$

En appliquant le théorème de convergence dominée aux deux intégrales, on obtient

$$I_n \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

Exercice 3 : [énoncé]

A chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

a) Ici, on ne peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $[0, +\infty[$ après une majoration de $|\sin x|$ par 1 car la fonction dominante $\varphi(x) = 1/x^2$ ne sera pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour contourner cette difficulté, on découpe l'intégrale.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \right| \leq \int_0^1 |\sin^{n-2}(x)| \, dx \text{ car } |\sin x| \leq |x|$$

Sans difficultés, par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 |\sin^{n-2}(x)| \, dx \rightarrow 0$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \rightarrow 0$$

Aussi

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2} \, dx$$

Or $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \xrightarrow{CS} f(x)$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \neq \pi/2$ $[\pi]$.

De plus $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[1, +\infty[$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2} \, dx \rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) \, dx = 0$$

puis $u_n \rightarrow 0$.

b) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1}$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} \right| \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

en vertu du théorème de convergence dominée et via la domination $\left| \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

Ainsi $u_n \rightarrow 1$.

c) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1}$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} \right| \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$$

donc $u_n \rightarrow 0$.

On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée mais c'est moins efficace.

Exercice 4 : [énoncé]

Posons

$$f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{nt + t^2}$$

La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $f_n(t) \sim \frac{nt}{nt+t^2} \rightarrow 1$.

Quand $t \rightarrow +\infty$; $f_n(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On peut donc affirmer que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Pour $t \in]0, +\infty[$.

Quand $n \rightarrow +\infty$, $f_n(t) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

De plus, pour $t \leq \pi/2$, on a, sachant $|\sin u| \leq |u|$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{nt}{nt + t^2} \leq 1$$

et pour $t \geq \pi/2$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{nt + t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

Ainsi $|f_n| \leq \varphi$ avec

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \pi/2] \\ 1/t^2 & \text{si } t \in]\pi/2, +\infty[\end{cases}$$

La fonction φ étant intégrable sur $]0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0$$

Exercice 5 : [énoncé]

La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi, [2\pi]$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) \, dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin^n t| \, dt$$

On a

$$f_n(t) = |e^{-t} \sin^n(t)| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 \\ e^{-t} & \text{sinon} \end{cases} \quad [\pi]$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) \, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \, dt = 0$$

Exercice 6 : [énoncé]

Les fonctions données par

$$f_n(t) = (1 + t^2/n)^{-n}$$

sont définies et continues par morceaux sur \mathbb{R} .

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f avec $f(t) = e^{-t^2}$ définie et continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et considérons

$$\varphi : x \mapsto -x \ln(1 + t^2/x)$$

définie sur $[1, +\infty[$.

En étudiant le signe de φ'' , on démontre φ' est croissante. Or $\lim_{+\infty} \varphi' = 0$ et donc φ' est négative.

La fonction φ est donc décroissante et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(t)| \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \exp(\varphi(n)) \leq \exp(\varphi(1)) = \frac{1}{1 + t^2}$$

La fonction $t \mapsto 1/(1 + t^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$$

Exercice 7 : [énoncé]

La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et on observe

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}$$

avec $3n > 1$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ est bien définie pour $n \geq 1$.

Par application du théorème de convergence dominée (en prenant $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^3}$ pour dominatrice), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} = 0$$

La décroissance de $(|u_n|)$ et la positivité de l'intégrale étant des propriétés immédiates, on peut appliquer le critère spécial et affirmer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 : [énoncé]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \mapsto e^{-x^n}$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. Etant de plus négligeable devant $1/x^2$ quand $x \rightarrow +\infty$, on peut affirmer qu'elle est intégrable et on peut donc introduire

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$$

Par le changement de variable C^1 strictement monotone donné par la relation $t = x^n$, on obtient

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt$$

Posons alors

$$f_n : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n}$$

Les fonctions f_n sont définies et continues par morceaux sur $[1, +\infty[$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ fonction continue par morceaux et intégrable puisque $t^2 \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Exercice 9 : [énoncé]

f_n est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Par suite f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} dx$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n \ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = n f_n(x)$$

Pour $x > 0$, quand $n \rightarrow +\infty$, $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$.

De plus, sachant $\ln(1+u) \leq u$, on a $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable. Par convergence dominée,

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 10 : [énoncé]

Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns) ds$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \rightarrow \ell$$

Exercice 11 : [énoncé]

Considérons la suite des fonctions $u_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $u_n(t) = f(t^n)$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et par continuité de f

$$u_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u(t) \underset{\text{déf}}{=} \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0, 1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

La suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction u continue par morceaux.

Enfin, la fonction f étant continue sur un segment, elle y est bornée ce qui permet d'introduire

$$M = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

Puisque

$$\forall t \in [0, 1], |u_n(t)| \leq M$$

avec $t \mapsto M$ intégrable sur $[0, 1]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\int_0^1 f(t^n) dt \rightarrow \int_0^1 u(t) dt = f(0)$$

Exercice 12 : [énoncé]

Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n) e^{-u} du$$

Par convergence dominée, sachant

$$|f(u/n)| \leq \|f\|_\infty e^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \rightarrow \int_0^{+\infty} f(0) e^{-u} du = f(0)$$

Exercice 13 : [énoncé]

Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2} du$$

Posons alors $f_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ définie sur \mathbb{R}^+ .

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers

$$f_\infty : u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur \mathbb{R}^+ .

$$|f_n(u)| \leq \|f\|_\infty = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2} du = \frac{\pi f(0)}{2}$$

Exercice 14 : [énoncé]

a) Pour $x > 0$, posons

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt) dt$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.

Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} (\sin t)^{n+1} x f'(xt) dt$$

Posons $g_n(x) = |\sin t|^{n+1} x f'(xt) dt$.

Chaque fonction g_n est continue par morceaux.

La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x \neq \pi/2 + k\pi$.

La fonction limite simple est continue par morceaux.

Enfin on a la domination

$$|g_n(x)| \leq x f'(xt) = \varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.

Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et par comparaison

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme.

Par changement de variable

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} |\sin(u/x)|^{n+1} f'(u) du$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} |f'(u)| du \leq \varepsilon$$

et alors

$$|u_n(x)| \leq M \int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du + \varepsilon \text{ avec } M = \max_{u \in [0, A]} |f'(u)|$$

Pour $x \geq 4A/\pi$, on a

$$\forall u \in [0, A], 0 \leq \frac{u}{x} \leq \frac{A}{x} \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq \frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}$$

Pour $x \leq 4A/\pi$, on a par changement de variable

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du = x \int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1} dt$$

Pour k entier tel que $k\pi < A/x \leq (k+1)\pi$.

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq x \int_0^{(k+1)\pi} |\sin t|^{n+1} dt = x(k+1) \int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1} dt$$

Or $x(k+1)\pi \leq A + x\pi \leq 5A$ donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq 5A$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$|u_n(x)| \leq 5AM + \frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}} + \varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

Exercice 15 : [énoncé]

Posons

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $t \in [0, +\infty[$, à partir d'un certain rang $t > n$ et

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \rightarrow e^{-t^2}$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto e^{-t^2}$.

En vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient

$$|f_n(t)| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$$

et ce que $t \in [0, n]$ ou non.

La fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Exercice 16 : [énoncé]

Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 + x/n)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $x \in [0, +\infty[$, à partir d'un certain rang $x \geq n$ et

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - 2x\right) \rightarrow e^{-x}$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto e^{-x}$.

En vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient

$$|f_n(x)| \leq e^{-x} = \varphi(x)$$

et ce que $x \in [0, n]$ ou non.

La fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

Exercice 17 : [énoncé]

Par changement de variable

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx \underset{u=1-x/n}{=} n \int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du$$

Par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx \sim n$$

Exercice 18 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]n, +\infty[$.
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$f_n(x) = \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{2n^2} + o(1/n^2)\right)\right) \rightarrow e^{-x^2/2}$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[0, +\infty[CS f$ avec $f : x \mapsto e^{-x^2/2}$.

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.

Soit $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = 1 - t^2/4 - \cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x \in [0, 1], \psi(x) \geq 0$$

On en déduit que, pour $x \in [0, n]$,

$$\ln\left(\cos \frac{x}{n}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) \leq -\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x) \leq e^{-x^2/4}$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x \in]n, +\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 19 : [énoncé]

On a

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt \underset{u=nt}{=} \int_0^n \frac{f(u)}{1+u/n} du = \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

avec

$$f_n(u) = \begin{cases} \frac{f(u)}{1+u/n} & \text{si } u \in [0, n] \\ 0 & \text{si } u \in]n, +\infty[\end{cases}$$

On a $f_n \xrightarrow{CVS} f$ avec f_n et f continues et $|f_n| \leq |f| = \varphi$ avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0, +\infty[$ indépendant de n .

Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} f_n(u) du \rightarrow \int_0^{+\infty} f(u) du$$

Exercice 20 : [énoncé]

On a

$$\left| \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \right| \leq \frac{1 \times 2}{(x+1)(x+2)} \times 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \rightarrow -\infty$$

car $\ln(1 + x/k) \sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.

Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \rightarrow 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx = 0$$

Exercice 21 : [énoncé]

a) Appliquons le théorème de convergence dominée.

Posons $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = F(\sqrt{n}(\delta t - h))$$

Pour $t \in [0, h/\delta[$, on a $f_n(t) \rightarrow 1$.

Pour $t \in]h/\delta, 1]$, on a $f_n(t) \rightarrow 0$.

Enfin, pour $t = h/\delta$, $f_n(t) = F(0) \rightarrow F(0)$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t = h/\delta \\ 0 & \text{si } t \in]h/\delta, 1] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.

Enfin

$$\forall t \in [0, 1], |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.

Par convergence dominée,

$$I_n \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^{h/\delta} 1 dt = \frac{h}{\delta}$$

b) Par la décroissance de F , on peut écrire

$$\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \leq \frac{1}{n} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \leq \frac{S_n}{n} \leq I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt = \int_0^1 F(\sqrt{n}(\delta(t + 1/n) - h)) dt$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n \sim \frac{h}{\delta} n$$

Exercice 22 : [énoncé]

a) Considérons la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

La fonction φ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1[$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\varphi(x) \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow 1^-$,

$$\varphi(x) = \frac{x}{x+1} \frac{\ln x}{x-1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Puisque φ se prolonge par continuité en 0 et en 1, φ est intégrable sur $]0, 1[$.

Or

$$|f_n(x)| = x^{2n} |\varphi(x)| \leq |\varphi(x)|$$

donc, par domination, la fonction f_n est elle aussi intégrable sur $]0, 1[$.

b) La suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction nulle et est dominée par la fonction intégrable φ donc par convergence dominée

$$J_n \rightarrow 0$$

c) On a

$$J_k - J_{k+1} = - \int_0^1 x^{2k+1} \ln(x) dx$$

Réalisons une intégration par parties

$$- \int_{\varepsilon}^a x^{2k+1} \ln(x) dx = - \left[\frac{x^{2k+2}}{2k+2} \ln x \right]_{\varepsilon}^a + \int_{\varepsilon}^a x^{2k+1} dx$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $a \rightarrow 1^-$, on obtient

$$J_k - J_{k+1} = \frac{1}{(2k+2)^2}$$

et donc

$$J_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} (J_k - J_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$$

Enfin par translation d'indice

$$J_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 23 : [énoncé]

a) (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, 1[\\ f(1)/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1, b] \end{cases}$$

b) Sachant $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ avec f intégrable sur $[a, b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

c) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \left[\frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 - \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt$$

D'une part

$$\left[\frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 = \frac{\ln 2}{n} f(1) + \frac{\ln(1+a^n)}{n} f(a) = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $\ln(1+a^n) \rightarrow 0$.

D'autre part

$$\left| \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \|f'\|_\infty \int_0^1 t^n dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant $\ln(1+u) \leq u$.

Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 24 : [énoncé]

L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx = \int_a^b f_n(x) g(x) dx$$

est bien définie.

Par le changement de variable $x = u/n$ bijectif de classe \mathcal{C}^1

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n) du = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(u) du$$

avec

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n) \chi_{[na, nb]}$$

h_n est continue par morceaux, (h_n) converge simplement vers h continue par morceaux avec

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} g(0)$$

Pour n assez grand de sorte que $|a/n|, |b/n| \leq 1$ on a pour tout $u \in [na, nb]$, $|u^2/2n^4| \leq 1/2 < 1$,

$$|h_n(u)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 \ln(1-u^2/2n^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} = \varphi(u)$$

et cette inégalité vaut aussi pour $u \notin [na, nb]$.

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Exercice 25 : [énoncé]

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} dt$ est définie car la fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque

$$\sqrt{t} \ln(t) e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+ 0]{} 0 \text{ et } t^2 \ln(t) e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty 0]{} 0$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, e^{-t} est la limite de

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \chi_{[0, n]}(t)$$

Le $n-1$ de l'exposant n'est pas usuel et peut très bien être remplacé par un n . Néanmoins pour alléger les calculs à venir, le $n-1$ est préférable...

On a

$$\ln(t) u_n(t) \rightarrow \ln(t) e^{-t}$$

et

$$|\ln(t) u_n(t)| \leq e \ln(t) e^{-t}$$

donc par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt$$

On a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt = \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \ln(nu) du$$

avec

$$\int_0^1 n(1-u)^{n-1} \ln(nu) du = \ln n + \int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du$$

et par intégration par parties

$$\int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du = [\ln(u)(1-(1-u)^n)]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du$$

On notera qu'on a choisi $(1-(1-u)^n)$ pour primitive de $n(1-u)^{n-1}$ car celle-ci s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties n'engage que des intégrales convergentes.

Enfin

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \int_0^1 \frac{v^n - 1}{v-1} = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k dv$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1)$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} dt = -\gamma$$

Exercice 26 : [énoncé]

Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

donc

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$ et, en vertu de l'étude qui précède, la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

qui est sommable. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 27 : [énoncé]

Pour $x \in]0, 1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

et pour $x \in]0, 1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} (\ln x)^2$$

Considérons alors la série des fonctions

$$u_n(x) = (-1)^n x^{2n} (\ln x)^2$$

Par convergence des séries précédentes, la série des fonctions u_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto (\ln x)^2/(1+x^2)$. Les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux.

Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^1 |u_n(x)| dx = \int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 dx$$

Par intégration par parties, on montre

$$\int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 dx = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et affirmer

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 28 : [énoncé]

Sur $]0, 1[$,

$$\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} (\ln t)$$

Posons $f_n(t) = (-1)^n t^{2n} \ln t$.

Les $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0, 1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{2n} \ln t dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Ce dernier calcul est non trivial et fait référence à la constante de Catalan.

Exercice 29 : [énoncé]

Pour $t \in]0, 1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t \, dt = \frac{-1}{(2n+1)^2}$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} \, dt = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

Exercice 30 : [énoncé]

a) Par intégration par parties,

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt = [\ln(1+t) \ln(t)]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln t}{1+t} \, dt$$

et quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} \, dt$$

b) Sur $]0, 1[$,

$$-\frac{\ln t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^n (\ln t)$$

Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1} t^n \ln t$.

Les $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t}$ elle-même continue par morceaux sur $]0, 1[$.

On a

$$\int_0^1 |f_n(t)| \, dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc

$$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} t^n \ln t \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

c) En séparant les termes pairs et les termes impairs (ce qui se justifie en transitant par les sommes partielles)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 31 : [énoncé]

a) Par une intégration par parties

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\arctan t}{t} \, dt = [\ln(t) \arctan(t)]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$$

Sachant $\arctan t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, on obtient quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} \, dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$$

avec convergence des intégrales proposées

b) Pour tout t élément de $]0, 1[$,

$$-\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{2n} (\ln t)$$

Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1} t^{2n} \ln t$.

Les $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0, 1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)| \, dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc

$$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} t^{2n} \ln t \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Rq : on aurait aussi pu exploiter $\arctan t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} t^{2n+1}$.

Exercice 32 : [énoncé]

Pour $t > 0$, on peut écrire

$$\frac{\sin t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt}$$

La fonction $t \mapsto \sin t \cdot e^{-nt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-nt} dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

est le terme général d'une série convergente donc par le théorème de Fubini d'intégration terme à terme $t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-nt} dt = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+i)t} dt = \frac{1}{n^2 + 1}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Exercice 33 : [énoncé]

Les intégrales considérées sont bien définies.

Par intégration par parties,

$$I_n(m) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^m \right]_0^1 - \frac{m}{n+1} I_n(m-1)$$

Ainsi

$$I_n(m) = \frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}} m!$$

En particulier

$$I_n(n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} n!$$

b) $x^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n$.

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_n(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Exercice 34 : [énoncé]

On a

$$\frac{1}{x^x} = e^{-x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \int_{]0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!}$$

Les f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ CS vers une fonction continue par morceaux sur $]0, 1[$.

Les f_n sont intégrables et

$$\int_{]0,1]} |f_n| = \int_{]0,1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} dx$$

Or

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{n}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

donc quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n dx = -\frac{n}{n+1} \int_{]0,1]} x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

Ainsi

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \text{ et } \sum \int_0^1 |f_n| \text{ converge}$$

Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient que l'intégrale étudiée et définie et

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 35 : [énoncé]

Par la série exponentielle, on peut écrire pour $t > 0$,

$$t^{-t} = \exp(-t \ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t \ln t)^n}{n!}$$

Pour procéder à une intégration terme à terme, posons $u_n(t) = (-1)^n (t \ln t)^n / n!$ pour $t \in]0, 1]$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction $t \mapsto t^{-t}$ elle-même continue par morceaux.

Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0, 1]$ car on peut les prolonger par continuité en 0 et

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = (-1)^n \int_0^1 u_n(t) dt$$

Par intégration par parties

$$\int_{\varepsilon}^1 (t \ln t)^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^n \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{n}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 t^n (\ln t)^{n-1} dt$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\int_0^1 (t \ln t)^n dt = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 t^n (\ln t)^{n-1} dt$$

En itérant le procédé on obtient

$$\int_0^1 (t \ln t)^n dt = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et ainsi

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \int_0^1 |u_n|$ étant convergente, on peut intégrer terme à terme et l'on obtient

$$\int_0^1 t^{-t} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

avec existence de l'intégrale en premier membre.

Exercice 36 : [énoncé]

a) $f_{p,k}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Quand $x \mapsto 0^+$, $\sqrt{x} f_{p,k}(x) = x^{p+1/2} (\ln x)^k \rightarrow 0$ donc $f_{p,k}(x) = o(1/\sqrt{x})$.

Par suite $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b) Par intégration par parties

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}$$

c)

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

et donc

$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

d) $x^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$ pour tout $x \in]0, 1]$.

Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n!} (x \ln x)^n$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0, 1]$.

La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et sa somme, qui est $x \mapsto x^x$, est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Enfin

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

est terme général d'une série convergente.

Par théorème d'intégration terme à terme, $x \mapsto x^x$ est intégrable sur $]0, 1]$ et

$$I = \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Exercice 37 : [énoncé]

Pour $x \in]0, 1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ln x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

avec $f_n(x) = x^n (\ln x)^p$ sur $]0, 1[$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ l'est aussi.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0, 1[$ et par intégration par parties,

$$\int_0^1 |f_n| = (-1)^p \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx = \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

avec en substance existence de l'intégrale et de la série introduite.

Exercice 38 : [énoncé]

Pour $x > 0$,

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x dx = \int_{]0,1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0, 1[$.

Les fonctions f_n sont intégrables et

$$\int_{]0,1]} |f_n| = \int_{]0,1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} dx$$

Or

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{n}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

donc quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n dx = -\frac{n}{n+1} \int_{]0,1]} x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

Ainsi

$$\int_{]0,1]} x^n (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0,1]} x^x dx$ est définie et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 39 : [énoncé]

a) Sur $[0, 1[$, la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x}{1-x} (1 - \sqrt{x}) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$$

Cette fonction somme est continue par morceaux sur $[0, 1[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, 1[$ et

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$$

Ce terme est sommable et l'on peut donc intégrer terme à terme ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$$

b) Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)} = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{5}{3} - 2 \ln 2$$

Exercice 40 : [énoncé]

Pour $x \in [0, 2\pi]$, on peut écrire

$$e^{2 \cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n!}$$

Posons

$$f_n : x \in [0, 2\pi] \mapsto \frac{2^n \cos^n x}{n!}$$

Les fonctions f_n sont continues et la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ puisque

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{2^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On peut donc intégrer terme à terme pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \int_0^{2\pi} (\cos x)^n dx$$

Par intégration par parties (cf. intégrale de Wallis)

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} (\cos x)^{n-2} dx$$

Sachant

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^0 dx = 2\pi \text{ et } \int_0^{2\pi} (\cos x)^1 dx = 0$$

on obtient

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2p} dx = 2\pi \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ et } \int_0^{2\pi} (\cos x)^{2p+1} dx = 0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos x} dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}}{(2p)!} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} 2\pi = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(p!)^2}$$

Exercice 41 : [énoncé]

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} e^{ik\theta} d\theta$$

Par convergence normale de la série de fonctions sous-jacente sur $[0, 2\pi]$

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n+k)\theta} d\theta$$

Or $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta} d\theta = 0$ si $p \neq 0$ et $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta} d\theta = 2\pi$ si $p = 0$.

Par conséquent

$$I_n = (-1)^n 2^n \pi \text{ si } n \leq 0 \text{ et } I_n = 0 \text{ si } n > 0$$

Exercice 42 : [énoncé]

Si $|a| < 1$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-1)t}}{1 - ae^{-it}} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{i(n-(k+1))t} dt$$

Par convergence normale de la série

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \int_0^{2\pi} e^{i(n-(k+1))t} dt = \begin{cases} 2\pi a^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $|a| > 1$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{e^{it} - a} dt = -\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{1 - e^{it}/a} dt = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{k+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n+k)t} dt = \begin{cases} -2\pi a^{n-1} & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 43 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\forall t > 0, \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(a+nb)t}$$

Posons $f_n : \mathbb{R}^{+\star} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = te^{-(a+nb)t}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est continue par morceaux puisque c'est la fonction

$$t \mapsto \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}}$$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et par intégration par parties

$$\int_{[0, +\infty[} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{(a+bn)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} dt = \int_{[0, +\infty[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum \int_{[0, +\infty[} f_n \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$$

Exercice 44 : [énoncé]

La convergence de l'intégrale proposée est facile.

En découplant l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \int_0^{\pi} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx$$

Dans la somme proposée, le terme intégrale ne dépend de l'indice sommation donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi/n} \right) \int_0^{\pi} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{1}{1 - e^{-\pi/n}} \int_0^{\pi} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx$$

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{1 - e^{-\pi/n}} \sim \frac{n}{\pi}$$

et

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx \rightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

par application du théorème de convergence dominée.

Par le changement de variable $t = \tan x$ inspiré des règles de Bioche,

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Au final

$$\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1 + \cos^2 x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exercice 45 : [énoncé]

a) On a

$$u_n(1) = \int_0^{\pi/2} \sin t (\cos t)^n dt = \left[-\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} t \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$$

La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

b) Pour $\alpha \leq 1$,

$$\forall t \in]0, \pi/2], (\sin t)^\alpha \geq \sin t$$

et donc $u_n(\alpha) \geq u_n(1)$.

On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est alors divergente.

Pour $\alpha > 1$. La série des $u_n(\alpha)$ est une série à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha \frac{1 - (\cos t)^{n+1}}{1 - \cos t} dt$$

donc

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^\alpha}{1 - \cos t} dt$$

avec l'intégrale majorante qui est convergente puisque

$$\frac{(\sin t)^\alpha}{1 - \cos t} \sim 2 \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}} \text{ quand } t \rightarrow 0^+$$

Puisque la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ a ses sommes partielles majorées, elle est convergente.

c) Par ce qui précède, on peut intégrer terme à terme car il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des fonctions. On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha t}{1 - \cos t} dt$$

Pour $\alpha = 2$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} 1 + \cos t dt = \frac{\pi}{2} + 1$$

Pour $\alpha = 3$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1 - \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin t (1 + \cos t) dt = \frac{3}{2}$$

Exercice 46 : [énoncé]

a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

En posant u_n le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.

b) $S_{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^{n-1} dx$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permute et obtenir

$$S_{-1} = \int_0^1 \frac{x dx}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1} \binom{2n}{n}$$

on observe

$$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \quad (\star)$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$4 \left(S_0 - \frac{1}{2} \right) - 2 \left(S_{-1} - \frac{1}{2} \right) = S_0$$

puis

$$S_0 = \frac{1 + 2S_{-1}}{3}$$

c) On multiplie la relation (\star) par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des S_q avec $q < p$.

Exercice 47 : [énoncé]

a) $f : x \mapsto \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$ est définie, continue sur $[0, +\infty[$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$ donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est définie.

b)

$$\int_0^a \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \int_0^a \frac{1}{n^2 + x^2} dx - 2 \int_0^a \frac{x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

et

$$\int_0^a \frac{x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{n^2 + x^2} \right]_0^a + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{n^2 + x^2} dx$$

donc

$$\int_0^a \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \frac{a}{n^2 + a^2}$$

Par suite

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx = 0$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$ est convergente et de somme nulle.

c) Pour $x \in [0, a]$,

$$\left| \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{n^2 + a^2}{n^4}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + a^2}{n^4} < +\infty$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0, a]$. Par suite

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^a \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$$

d) La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2 + a^2}$ est décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par comparaison série-intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \left[\arctan \frac{x}{a} \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{a}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \left[\arctan \frac{x}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2}$$

e) Ci-dessus :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2} dx$$

est convergente et vaut $\pi/2$.

Le résultat différent de celui obtenu en b). Il est donc faux ici de permute somme et intégrale. Document 7

Exercice 48 : [énoncé]a) $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1/e < 1$.

b) Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$$

Par intégration par parties, on obtient $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où

$$a_n = n \int_0^{+\infty} t^n e^{-nt} dt$$

c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} n t^n e^{-nt} dt$$

et la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |n t^n e^{-nt}| dt = \sum a_n$$

converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n t^n e^{-nt} dt$$

avec

$$(1 - te^{-t}) \sum_{n=1}^{+\infty} n t^n e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{-nt} = \frac{te^{-t}}{1 - te^{-t}}$$

d'où la conclusion.

Exercice 49 : [énoncé]a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^n)$ sur $[0, 1]$.La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $u_\infty : t \mapsto 1$.Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux.

Enfin

$$\forall t \in [0, 1], |u_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable. Par convergence dominée

$$I_n = \int_0^1 u_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_\infty(t) dt = 1 = \ell$$

b) On a

$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \int_0^1 t \frac{t^{n-1}}{1+t^n} dt$$

Par intégration par parties,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

Puisque

$$\left| \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

on peut affirmer $\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.c) Pour $y \in]0, 1[$,

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k+1}$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

Sans peine, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.d) Par le changement de variable C^1 strictement croissant $y = t^n$

$$\int_0^1 \ln(1+t^n) dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}} dy$$

Par convergence dominée (domination par sa limite simple),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}} dy \rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 50 : [énoncé]

a) On a

$$|I_n - 1| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donc $I_n \rightarrow \ell = 1$.

b) Par intégration par parties

$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \int_0^1 t^n dt \rightarrow 0$$

donc

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

b) On a

$$\ln(1+t^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on obtient la relation proposée.

c) On a

$$n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

donc

$$n \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Finalement

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 51 : [énoncé]

a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s, \lambda) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{C}$.

$\Delta_\lambda :]0; +\infty[$.

b)

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right)$$

Or

$$\left| 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = e^{|\lambda|}$$

donc $F_\lambda(s) \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{} 0$.

c) Puisque

$$\left| \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \right| \leq \frac{\lambda^n}{n!}$$

il y a convergence normale sur \mathbb{R}^+ de la série des fonctions continues $s \mapsto \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}$. Ceci permet d'affirmer

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \xrightarrow[s \rightarrow 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$$

et donc

$$F_\lambda(s) \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{e^\lambda}{s}$$

d) Par intégrations par parties successives :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

e)

$$F_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n dy$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :

$$F_\lambda(s) = \int_0^1 e^{\lambda y} (1-y)^{s-1} dy$$

Exercice 52 : [énoncé]

La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left| a_p \frac{t^p}{p!} \right| \leq \| (a_n) \|_{\infty} \frac{t^p}{p!}$$

De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.

Enfin

$$\left| \sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right| \leq \| (a_n) \|_{\infty} e^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.

Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!} e^{-2t}$$

La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.

Les fonctions f_p et $\sum_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.

Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_p(t)| dt = \frac{|a_p|}{2^{p+1}} = O\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme générale d'une série convergente.

Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) dt = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Exercice 53 : [énoncé]

On sait que la fonction ζ est continue.

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} dx$$

avec

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{n^x} = \frac{1}{n^2 \ln n}$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permute intégrale et somme. On obtient alors

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

Exercice 54 : [énoncé]

a) Posons

$$f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) \right)^n$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, \pi/2[$, elle-même continue par morceaux. Enfin, on a la domination

$$|f_n(x)| \leq 1 = \varphi(x)$$

avec φ évidemment intégrable sur $[0, \pi/2[$. Par convergence dominée, on obtient

$$u_n \rightarrow 0$$

b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum f_n$. En effet, les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi/2[$ vers la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)}$$

elle-même continue par morceaux. Enfin les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, \pi/2[$ et l'hypothèse de travail absurde signifie la convergence de la série $\sum \int_{[0, \pi/2[} |f_n|$.

Par théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)} dx$$

avec convergence de l'intégrale. Or, quand $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right)} \sim \frac{8}{\pi^2 x^2}$$

et donc l'intégrale introduite diverge. C'est absurde.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 55 : [énoncé]

On a $u_n \geq v_n = \int_0^{\pi/2} e^{-t} \cos^{2n} t \, dt$.

Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0, \pi/2]$ de la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t} \cos^{2n} t = \frac{e^{-t}}{1 - \cos^2 t} = \frac{e^{-t}}{\sin^2 t}$$

Or quand $t \rightarrow 0^+$

$$\frac{e^{-t}}{\sin^2 t} \sim \frac{1}{t^2}$$

qui n'est pas intégrable sur $]0, \pi/2]$.

C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 56 : [énoncé]

a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^x)^n}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Cas $x < 0$:

$\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$ donc la fonction n'est pas intégrable.

Cas $x = 0$:

$\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$. Même conclusion.

Cas $x > 0$:

Quand $t \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \rightarrow 1$ et quand $t \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \sim \frac{1}{t^{nx}}$ donc la fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $nx > 1$.

b) Pour $t > 0$, on remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^x)^n} = \frac{1}{t^x}$$

Par l'absurde, si $\sum I_n(x)$ converge, on peut appliquer un théorème d'interversion somme et intégrale assurant que $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. C'est absurde. On conclut que $\sum I_n(x)$ diverge.

Par intégration par parties avec deux convergences

$$I_n(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

Or

$$I_n(2) - I_{n+1}(2) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

donc

$$I_{n+1}(2) = \frac{2n-1}{2n} I_n(2)$$

On en déduit

$$I_{n+1}(2) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

car $I_1(2) = \pi/2$.

Notons que par le changement de variable $t = \tan u$, on pouvait aussi transformer $I_n(2)$ en une intégrale de Wallis.

Exercice 57 : [énoncé]

a) Posons $f_n(t) = 1/(1+t^3)^n$ définie sur $[0, 1]$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la suite (f_n) converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction nulle, elle-même continue par morceaux. De plus

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]0, 1], |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

avec $\varphi : t \mapsto 1/(1+t^3)$ intégrable sur $]0, 1]$.

Par application du théorème de convergence dominée, on obtient $u_n \rightarrow 0$

b) Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction S continue par morceaux donnée par

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+t^3}} = \frac{1+t^3}{t^3}$$

Si, par l'absurde, la série $\sum u_n$ converge, on est dans la situation où la série de terme général $\int_{]0, 1]} |f_n(t)| dt$ converge et l'on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme affirmant :

$$S \text{ est intégrable sur }]0, 1] \text{ et } \int_{]0, 1]} S(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$$

Or ceci est absurde car la fonction S n'est pas intégrable sur $]0, 1]$!

On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 58 : [énoncé]

Posons $u_n(t) = 1/(1+t^3)^n$ définie sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$, elle-même continue par morceaux. De plus

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]0, +\infty[, |u_n(t)| \leq \varphi(t)$$

avec $\varphi : t \mapsto 1/(1+t^3)$ intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc aussi sur $]0, +\infty[$.

Par application du théorème de convergence dominée sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, on obtient

$$U_n \rightarrow 0 \text{ et } V_n \rightarrow 0$$

b) Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ vers la fonction U continue par morceaux donnée par

$$U(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1+t^3} \frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1}{t^3}$$

Si, par l'absurde, la série $\sum U_n$ converge, on est dans la situation où la série de terme général $\int_{]0,1]} |u_n(t)| dt$ converge et l'on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme affirmant :

$$U \text{ est intégrable sur }]0, 1] \text{ et } \int_{]0,1]} U(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$$

Or ceci est absurde car la fonction U n'est pas intégrable sur $]0, 1]!$

On en déduit que la série $\sum U_n$ diverge.

En revanche, la série $\sum V_n$ est à termes positifs et

$$\sum_{k=1}^n V_k \leq \int_1^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+t^3)^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum V_n$ étant majorées, on peut affirmer que la série $\sum V_n$ converge.

Exercice 59 : [énoncé]

a) Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x) \sim \frac{2x}{nx} \rightarrow \frac{2}{n}$ donc $\alpha = \frac{2}{n}$ est l'unique valeur pour laquelle f est continue en 0.

b) f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et quand $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) \sim \frac{e^x}{e^{nx}} \rightarrow 0$ donc f_n est bornée sur \mathbb{R}^+ .

On peut envisager une argumentation plus détaillée :

- puisque f converge en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que f est bornée sur $[A, +\infty[$;

- puisque f est continue, f est bornée sur $[0, A]$;

- et finalement f est bornée sur la réunion de ces deux intervalles par la plus grande des deux bornes.

c) f_n est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et quand $x \rightarrow +\infty$, $x^2 f_n(x) \sim x^2 e^{-(n-1)x} \rightarrow 0$ donc $f_n(x) = o(1/x^2)$ et donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

d) Pour $x > 0$,

$$\frac{2\sinh x}{e^{nx} - 1} = 2\sinh x \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-nkx} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x} \right| dx = \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1} = \frac{2}{n^2 k^2 - 1} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut sommer terme à terme et affirmer

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\sinh x}{e^{nx} - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x} \right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1}$$

Pour $n = 2$, la somme est facile à calculer.

Exercice 60 : [énoncé]

a) Par convergence dominée $I_n \rightarrow 0$.

b) Par intégration par parties avec convergence du crochet

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n} \right]_0^{+\infty} + 3n \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^n} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^n} dt = I_n - I_{n+1}$$

On en déduit la relation demandée.

c) La suite (u_n) a la nature de la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Or

$$v_n = \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{3n} \right) = \frac{\alpha - 1/3}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de terme général v_n converge si, et seulement si, $\alpha = 1/3$.

d) Puisque $\ln(n^{1/3} I_n) \rightarrow \ell$, on obtient

$$I_n \sim \frac{e^\ell}{\sqrt[3]{n}}$$

et donc

$$\frac{1}{n} I_n = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$$

Par suite $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} I_n$ converge.

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \text{ avec } f_n(t) = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n} = -\ln \left(1 - \frac{1}{1+t^3} \right)$$

est continue par morceaux.

Enfin, la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

On peut donc permute somme et intégrale pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_n = - \int_0^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{1+t^3} \right) dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi$$

la dernière intégrale étant calculer par intégration par parties puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 61 : [énoncé]

On a

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{na} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

avec $f_n(t) = (-1)^n t^{na}$ sur $]0, 1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{na+1}$$

et $\sum \frac{1}{na+1}$ diverge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini ne s'applique pas.

De plus la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ car elle ne converge pas simplement en 1...

Transitons alors par les sommes partielles et le théorème de convergence dominée. Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ka} = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)a}}{1+t^a}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $[0, 1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$$

elle-même continue par morceaux.

De plus

$$|S_n(t)| \leq \frac{2}{1+t^a} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0, 1[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$$

Or

$$\int_0^1 S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{ka} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$$

avec, en substance, la convergence de la série introduite.

Exercice 62 : [énoncé]

Notons que l'intégrale étudiée est bien définie.

Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1}$$

Le théorème d'intégration terme à terme ne pourra pas s'appliquer car ici

$$\sum \int_{]0,1[} |f_n| = \sum \frac{1}{n+\alpha} \text{ diverge}$$

Nous allons alors intégrer terme à terme en exploitant les sommes partielles.

Posons

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} = x^{\alpha-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et convergent simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction

$$S : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$

elle-même continue par morceaux.

De plus

$$|S_n(x)| \leq \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x} = \varphi(x)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0, 1[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

Or

$$\int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$$

et on peut donc conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

avec en substance la convergence de la série introduite.

Exercice 63 : [énoncé]

a) Pour $t \in]0, 1[$, on peut écrire

$$\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}$$

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^b}$$

elle-même continue par morceaux.

De plus

$$|S_n(t)| \leq \frac{2t^{\alpha-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0, 1[$.

Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t) dt \rightarrow \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^b} dt$$

avec convergence de l'intégrale introduite.

Or

$$\int_0^1 S_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb-1} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a+kb}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^b} dt$$

avec convergence de la série introduite..

b) Après calculs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 64 : [énoncé]

Soit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2}$$

On observe $\|f_n\|_\infty = 1/n^2$ et donc la série des fonctions f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0, +\infty[$. Puisque chaque f_n est continue, on peut affirmer que la fonction

$$S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2}$$

est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Les fonctions f_n sont intégrables sur \mathbb{R}^+ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n^2 + t^2} = \frac{\pi}{2n}$$

Puisque la série $\sum f_n$ diverge, on ne peut intégrer terme à terme par le théorème de Fubini.

Raisonnons alors par les sommes partielles en exploitant le théorème de convergence dominée.

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 + t^2}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$ et converge simplement vers la fonction S elle-même continue par morceaux.

De plus, le critère spécial des séries alternées s'appliquant, on a

$$0 \leq S_n(t) \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(t) dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2} dt$$

Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

donc

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + t^2} dt$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 65 : [énoncé]

Posons

$$f_n : x \mapsto (-1)^n e^{-a_n x}$$

Les fonctions f_n sont continues et en vertu du critère spécial des séries alternées, on peut affirmer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. De plus, par le critère spécial des séries alternées, on a

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-a_k x} \right| \leq e^{-a_{n+1} x}$$

ce qui permet d'établir que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$$

est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Pour intégrer terme à terme, nous allons exploiter les sommes partielles et le théorème de convergence dominée. Posons

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-a_k x}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement vers S elle-même continue par morceaux.

En vertu du critère spécial des séries alternées, on a

$$0 \leq S_n(x) \leq S_0(x) = e^{-a_0 x} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable.

Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(x) dx \rightarrow \int_0^{+\infty} S(x) dx$$

avec convergence de l'intégrale introduite.

Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-a_k x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a_k}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx$$

avec en substance convergence de la série écrite.

Exercice 66 : [énoncé]

a) La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $\frac{t^{x-1}}{1+t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$

donc $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b) Posons $g(x, t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$ sur $]0, +\infty[\times]0, 1]$.

$t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$,

$x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$,

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, 1], |g(x, t)| \leq \frac{t^{a-1}}{1+t} \leq t^{a-1} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $]0, 1]$.

Par domination sur tout segment de $]0, +\infty[$, on peut affirmer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

c) Pour $x > 0$

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

d) Quand $x \rightarrow 0^+$, $f(x+1) \rightarrow f(1)$ donc $f(x+1) = o(1/x)$ puis $f(x) \sim 1/x$.

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} t^{x-1} dt = \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

donc $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exercice 67 : [énoncé]

a) Posons $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \frac{e^{-t}}{1 + tx}$$

Pour chaque $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

On en déduit la convergence de l'intégrale impropre définissant $F(x)$.

b) Pour chaque $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est indéfiniment dérivable et

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-1)^n n!}{(1 + tx)^{n+1}} t^n e^{-t}$$

La fonction $x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est continue, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est continue par morceaux et

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq n! t^n e^{-t} = \varphi_n(t)$$

avec $\varphi_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

Par domination, on peut alors affirmer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

c) En particulier

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2$$

Exercice 68 : [énoncé]

Considérons $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable car

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -t \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable.

La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x , continue par morceaux en t .

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Sur $[a, +\infty[\times [0, +\infty[$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-at}$$

avec $\varphi : t \mapsto e^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par domination sur tout compact, la fonction F est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

Enfin $F \xrightarrow{+\infty} 0$ car

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 69 : [énoncé]

a) $g : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est définie continue en x et continue par morceaux en t sur $\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[$ avec

$$|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

et φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .

b) $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et est continue en x et continue par morceaux en t sur $\mathbb{R}^{+\star} \times [0, +\infty[$. Pour $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$ on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -\frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} \right| \leq e^{-at^2} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Par domination sur tout segment de $\mathbb{R}^{+\star}$, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ avec

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

Enfin,

$$f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \underset{u=\sqrt{xt}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 70 : [énoncé]

- a) $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ donc $g(0)$ existe.
 $u \mapsto 1/u$ est une bijection \mathcal{C}^1 entre $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{+\star}$.

On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u du}{1+u^3}$$

Donc

$$2g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$g(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

- b) La fonction g est paire. Pour $0 \leq x \leq x'$, on a pour tout $t \geq 0$, $e^{-tx^2} \geq e^{-tx'^2}$ donc g est décroissante sur \mathbb{R}^+ .

- c) Pour $x > 0$,

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dt = \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Exercice 71 : [énoncé]

- a) Posons

$$g(x, t) = \frac{1}{1+x^3+t^3}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est définie, continue sur \mathbb{R}^+ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 1/t^3$ donc $f(x)$ existe.

- b) $u \mapsto 1/u$ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme entre $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{+\star}$.

On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{u du}{1+u^3}$$

Donc

$$2f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

- c) $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}^+ , $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ avec

$$|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$$

et φ intégrable sur $[0, +\infty[$ donc f est continue.

Si $x \leq y$ alors $\forall t \in [0, +\infty[$, $g(y, t) \leq g(x, t)$ donc $f(y) \leq f(x)$. Ainsi f est décroissante.

Rq : On peut aussi montrer f de classe \mathcal{C}^1 mais cela alourdit la démonstration

- d) f tend vers 0 en $+\infty$ car

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^3 + t^3} \underset{t=xu}{=} \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

Exercice 72 : [énoncé]

- a) Posons $u : \mathbb{R} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x, \theta) = \cos(x \sin \theta)$$

La fonction u admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, \theta) = -\sin \theta \sin(x \sin \theta) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \theta) = -\sin^2 \theta \cos(x \sin \theta)$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto u(x, \theta)$ et $\theta \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, \theta)$ sont continues par morceaux sur $[0, \pi]$ donc intégrable.

De plus $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en θ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \theta \in [0, \pi], \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \theta) \right| \leq 1 = \varphi(\theta)$$

L'application φ étant intégrable sur $[0, \pi]$, on peut affirmer par domination sur tout segment que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 avec

$$f'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos(x \sin \theta) d\theta \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(x \sin \theta) d\theta$$

b) On remarque

$$f''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) \cos(x \sin \theta) d\theta$$

et donc

$$x(f''(x) + f(x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta \cdot (x \cos \theta \cos(x \sin \theta)) d\theta$$

Par intégration par parties, on obtient

$$x(f''(x) + f(x)) = -f'(x)$$

On en déduit que f est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin \theta)^{2n} x^{2n} d\theta$$

Puisque la série $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente, un argument de convergence normale permet une intégration terme à terme et donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \text{ avec } a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)! \pi} \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n} d\theta$$

d) Nous pourrions calculer l'intégrale définissant a_n car c'est une intégrale de Wallis, mais puisqu'on nous demande d'exploiter l'équation différentielle...

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par dérivation d'une série entière

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)a_{n+1}x^{2n+1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)(2n+1)a_{n+1}x^{2n}$$

L'équation $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$ donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+2)^2 a_{n+1} + a_n) x^{2n+1} = 0$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière de rayon de convergence > 0 , on obtient

$$(2n+2)^2 a_{n+1} + a_n = 0$$

Sachant $a_0 = 1$, on conclut

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$$

Exercice 73 : [énoncé]

a) Introduisons $g(x, t) = \frac{\cos t}{t+x}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star} \times [0, \pi/2]$.

La fonction g est continue et x et continue par morceaux en t .

Pour $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$, on a

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, \pi/2], |g(x, t)| \leq \frac{1}{t+a} = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0, \pi/2]$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Aussi, pour $0 < x \leq x'$, on a

$$\forall t \in [0, \pi/2], g(x', t) \leq g(x, t)$$

En intégrant, on obtient $f(x') \leq f(x)$. La fonction f est donc décroissante.

On aurait pu aussi établir que f est de classe \mathcal{C}^1 et étudier le signe de sa dérivée.

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t} dt \rightarrow 0$$

Quand $x \rightarrow 0^+$

$$f(x) \geq \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{t+x} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} [\ln(t+x)]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{x+\pi/4}{x} \rightarrow +\infty$$

c)

$$\frac{1}{x+\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos t dt \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} \cos t dt$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

On sait :

$$\forall 0 \leq t \leq \pi/2, 1 - \frac{1}{2}t^2 \leq \cos t \leq 1$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t+x} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t^2 dt}{t+x} \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t+x}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{t+x} = \ln \frac{x+\pi/2}{x} \underset{0}{\sim} -\ln x$$

et

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{t^2 dt}{t+x} \leq \int_0^{\pi/2} t dt = C = o(\ln x)$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$$

Exercice 74 : [énoncé]

a) La fonction $t \mapsto (\sin t)^x$ est définie, continue et positive sur $]0, \pi/2]$.
 Quand $t \rightarrow 0^+$, $(\sin t)^x \sim t^x$ avec $x > -1$ donc $t \mapsto (\sin t)^x$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$.

Ainsi f est définie et positive sur $]-1, +\infty[$
 b) La fonction

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(\sin t)(\sin t)^x$$

est définie, continue en x et continue par morceaux en t .Soit $[a, b] \subset]-1, +\infty[$. Sur $[a, b] \times]0, \pi/2]$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln(\sin t)(\sin t)^a| = \varphi(t)$$

avec φ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ car pour α tel que $-a < \alpha < 1$,

$$t^\alpha \varphi(t) \sim t^{a+\alpha} |\ln(t)| \rightarrow 0$$

Par domination sur tout segment, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, +\infty[$ et

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)(\sin t)^x dt \leq 0$$

Ainsi la fonction f est décroissante.

c) En intégrant par parties

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x (1 - \cos^2 t) dt = f(x) - \left[\frac{(\sin t)^{x+1}}{x+1} \cos t \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{x+1} f(x+2)$$

et donc

$$f(x+2) = \frac{x+1}{x+2} f(x)$$

d) On a

$$\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = xf(x-1)f(x) = \varphi(x)$$

et

$$\varphi(1) = f(0)f(1) = \pi/2$$

donc par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \pi/2$$

e) φ est continue et quand $x \rightarrow 0$,

$$\varphi(x) = \varphi(1+x) \rightarrow \varphi(1) = \pi/2$$

Or quand $x \rightarrow 0$,

$$f(x) \rightarrow f(0) = \pi/2$$

donc quand $x \rightarrow -1$,

$$f(x) = \frac{\varphi(x+1)}{(x+1)f(x+1)} \sim \frac{1}{x+1}$$

Rq : En fait on peut montrer que φ est une fonction constante.**Exercice 75 : [énoncé]**a) Posons $u(x, t) = (\sin t)^x$ définie sur $\mathbb{R} \times]0, \pi/2]$.Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, \pi/2]$.

On a

$$u(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^x$$

donc $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $]0, \pi/2]$ si, et seulement si, $x > -1$.De plus, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction.En conclusion, l'intégrale existe si, et seulement si, $x > -1$.b) u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \ln(\sin t)(\sin t)^x$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .Pour $[a, b] \subset]-1, +\infty[$, on a

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, \pi/2], \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln(\sin t)| (\sin t)^a = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable car

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} |\ln t| |t^a| = o(t^\alpha) \text{ avec } \alpha \in]-1, a[$$

Par domination sur tout segment, on obtient f de classe \mathcal{C}^1 avec

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) (\sin t)^x dt \leq 0$$

c) Posons

$$\varphi(x) = (x+1)f(x)f(x+1)$$

Une intégration par parties avec

$$u'(t) = \sin t \text{ et } v(t) = (\sin t)^{x-1}$$

donne

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt = (x-1) \left(\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x-2} dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt \right)$$

On en déduit

$$\varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Montrons que cette fonction est en fait constante.

Soit $a \in]-1, 0[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(a+n) = \varphi(a)$.

En posant $p = \lfloor a \rfloor$, la décroissance de f donne

$$\varphi(a) = \varphi(a+n) \leq (a+n+1)f(p+n)f(p+n+1)$$

Or

$$(p+n+1)f(p+n)f(p+n+1) = \varphi(p+n) = \varphi(0)$$

et donc

$$(a+n+1)f(p+n)f(p+n+1) = \frac{a+n+1}{p+n+1} \varphi(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(0)$$

De façon semblable, $\varphi(a)$ peut être minorée par une suite de limite $\varphi(0)$.

On peut donc affirmer que φ est constante.

Exercice 76 : [énoncé]

Etudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} dt$$

Notons $u(x, t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[$

$t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto u(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}^+ pour chaque $t \in]0, +\infty[$ et

$$|u(x, t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .

$x \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ pour chaque $t \in]0, +\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ pour chaque $t \in]0, +\infty[$

$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{2x} \frac{1}{(1+t^2)}$$

car $2tx \leq x^2 + t^2$.

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{2a} \frac{1}{(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ fonction intégrable.

Par domination sur tout segment, on obtient f de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)} dt$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t^2}{x^2+t^2} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{(x^2-1)}$$

Cette identité se prolonge en $x = 1$ par un argument de continuité.

On a alors

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x \frac{\ln t}{(t^2-1)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) - f(\varepsilon)$$

Or $f(0) = 0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2 - 1)} dt = f(x)$$

Exercice 77 : [énoncé]

a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) \geq a\}$.
 $t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω et pour $z \in \Omega_a$,

$$\left| \frac{t^z}{1+t} \right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0, 1]$ car $\varphi(t) \sim t^a$ quand $t \rightarrow 0^+$.

Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur Ω_a .

Ceci valant pour tout $a > -1$, on peut encore affirmer que f est définie et continue sur Ω .

b) On observe

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -1} f(0)$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$$

c) Par intégration par parties

$$(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt$$

Or

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 |t^{z+1}| dt$$

avec

$$|t^{z+1}| = |\exp((z+1)\ln t)| = \exp((\operatorname{Re}(z)+1)\ln t) = t^{\operatorname{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1.

On a alors

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)+1} dt = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)+2} \xrightarrow{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi

$$(z+1)f(z) \xrightarrow{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

puis

$$f(z) \underset{\operatorname{Re}(z) \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2z}$$

Exercice 78 : [énoncé]

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1) \text{ et } \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Posons $g(x, t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$.

g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{e^t - 1} \cos(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Enfin $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{e^t - 1} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par domination, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 , a fortiori continue et dérivable.

c) La décomposition

$$\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

permet d'écrire

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt$$

Par la majoration $|\sin(u)| \leq |u|$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} |\sin(t) e^{-nt}| dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2}$$

La série $\sum \int_{[0, +\infty[} |\sin(t) e^{-nt}| dt$ converge, on peut intégrer terme à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt$$

On calcule l'intégrale sommée en considérant la partie imaginaire de

$$\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-nt} dt$$

On obtient à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Exercice 79 : [énoncé]

La fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[$ et

$$xf(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

Posons

$$u(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

définie sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

u admet deux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\frac{t}{1+t^2} e^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2}{1+t^2} e^{-tx}$$

Pour chaque $x > 0$, les fonctions u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables et pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a la domination

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$. Il en est de même pour f par opérations sur de telles fonctions.

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

donc $xf(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ puis

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

Etudions maintenant $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Par le changement de variable $u = tx$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{x^2 + u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x^2 + u^2} \frac{1 - e^{-u}}{u} du$$

avec

$$\varphi : u \mapsto \frac{1 - e^{-u}}{u}$$

Par intégration par parties,

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + u^2) \varphi(u) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \ln(x^2 + u^2) \varphi'(u) du$$

Pour $x \in]0, 1]$,

$$|\ln(x^2 + u^2)| \leq |\ln(u^2)| + |\ln(1 + u^2)|$$

et la fonction

$$u \mapsto (|\ln(u^2)| + |\ln(1 + u^2)|) \varphi'(u)$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ car φ' peut être prolongée par continuité en 0 et

$$\varphi'(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-u}}{u}$$

On en déduit

$$f(x) = -\ln x + O(1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$$

Exercice 80 : [énoncé]

a) Par le changement de variable $t = ux$ (bijection de classe \mathcal{C}^1) on obtient

$$f(x) = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}$$

Posons $g :]0, +\infty[\times]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}$$

La fonction g est continue sur $]0, +\infty[\times]-1, 1[$ et

$$|g(x, u)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $]-1, 1[$.

On en déduit que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Quand $x \rightarrow 0^+$

$$g(x, u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

Par la domination précédente

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_{-1}^1 = \pi$$

De même, on obtient

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{ } \int_{-1}^1 0 \, du = 0$$

Exercice 81 : [énoncé]

a) Puisque

$$\frac{\cos^2 t}{t} \sim \frac{1}{t} \text{ quand } t \rightarrow 0^+$$

on peut affirmer, par équivalence de fonctions positives, que l'intégrale diverge en 0.

On peut alors conclure que f est définie sur $]0, +\infty[$ (car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue converge) mais ne peut pas être définie sur un domaine plus grand.

b) Posons

$$g(x) = \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t} \, dt$$

Cette fois-ci

$$\frac{\sin^2 t}{t} \sim t \text{ quand } t \rightarrow 0^+$$

et donc la fonction g est définie et continue en 0.

Puisque

$$f(x) + g(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$$

on peut conclure

$$f(x) \sim \ln x \text{ quand } x \rightarrow 0^+$$

Aussi

$$f(x) = \int_1^x \frac{1 + \cos(2t)}{2t} \, dt = \frac{1}{2} \ln x + \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} \, dt$$

Comme la nouvelle intégrale converge en $+\infty$ (cela s'obtient par une intégration par parties) on conclut

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \ln x \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

Exercice 82 : [énoncé]

a) Pour que la racine carrée soit définie pour $t \in]0, 1[$, il est nécessaire que $x \in [-1, 1]$.

Pour $x \in]-1, 1[$, l'intégrale définissant f converge par les arguments d'intégrabilité suivant

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{ } \frac{C^{te}}{\sqrt{1-t}}$$

Pour $x = \pm 1$, l'intégrale définissant f diverge car

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-t)}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } \frac{1}{1-t} \geq 0$$

L'ensemble de définition de f est donc $]-1, 1[$.

b) Sur $]0, 1[$, la fonction f est croissante et admet donc une limite en 1^- .

Par l'absurde, si celle-ci est finie égale à $\ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall a \in [0, 1[, \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \leq \ell$$

Par intégration sur un segment, la fonction de x déterminée par le premier membre est continue en $x = 1$, on en déduit

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \leq \ell$$

Or ceci est absurde car par non intégrabilité d'une fonction positive

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \xrightarrow[a \rightarrow 1^-]{ } +\infty$$

Exercice 83 : [énoncé]

a) La fonction $x \mapsto 1/x^\alpha(1+x)$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ avec

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{ } \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \frac{1}{x^\alpha(1+x)} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{ } \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Cette fonction est donc intégrable si, et seulement si, $\alpha \in]0, 1[$.

La fonction intégrée étant de surcroît positive, l'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in]0, 1[$.

b) On a

$$f(\alpha) - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}(1+x)}$$

Or

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}(1+x)} \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = C$$

et pour $\alpha \leq 1/2$

$$\left| \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \right| \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = C'$$

On a donc

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} + O(1) = \frac{1}{\alpha} + O(1) \sim \frac{1}{\alpha}$$

c) Par le changement de variable C^1 bijectif $x = 1/t$, on obtient $f(\alpha) = f(1 - \alpha)$ d'où la symétrie affirmée.

d) Posons

$$u(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$$

Pour chaque $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto u(\alpha, x)$ est continue et pour chaque $\alpha \in]0, 1[$ la fonction $x \mapsto u(\alpha, x)$ est continue par morceaux. Enfin pour $\alpha \in [a, b] \subset]0, 1[$ (avec $a > 0$), on a

$$|u(x, \alpha)| \leq \frac{1}{x^a(1+x)} \text{ si } x \in [1, +\infty[$$

et

$$|u(x, \alpha)| \leq \frac{1}{x^b(1+x)} \text{ si } x \in]0, 1]$$

Ainsi

$$|u(x, \alpha)| \leq \varphi_{a,b}(x) \text{ pour } x \in]0, +\infty[$$

en posant $\varphi_a(x) = u(a, x) + u(b, x)$ qui est intégrable.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0, 1[$.

e) Par le changement de variable $x = 1/t$, on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$

et alors

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha} + x^\alpha}{x(1+x)} dx$$

On vérifie que pour $x \geq 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{1-\alpha} + x^\alpha$ est décroissante sur $]0, 1/2]$ puis croissante sur $[1/2, 1[$. La fonction f a donc la même monotonie et son minimum est donc

$$f(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$$

via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 84 : [énoncé]

a) Posons $f(x, t) = \frac{\ln t}{t+x}$.

f est définie et continue sur $]0, +\infty[\times]0, 1[$.

Pour $x > 0$, $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \ln t$ donc $\sqrt{t} f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$ puis $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Ainsi F est définie sur $]0, +\infty[$.

f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{\ln t}{(t+x)^2}$.

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Pour $x \in [a, b]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln t|}{a^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0, 1[$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que F est de classe C^1 et

$$F'(x) = \int_0^1 -\frac{\ln t}{(t+x)^2} dt$$

b) Par intégration par parties,

$$F'(x) = \left[\ln t \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x} \right) dt$$

où la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ est choisie de sorte de s'annuler en 0 pour que l'intégration par parties présente deux convergences.

Ainsi

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t(t+x)} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}$$

Par opérations

$$G'(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x} - \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x} = -\frac{1}{x} \ln x$$

puis

$$G(x) = G(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Or $G(1) = 2F(1)$ avec

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k \ln(t) dt$$

Or $\int_0^1 t^k \ln(t) dt = \frac{-1}{(k+1)^2}$ donc par convergence de la série des intégrales des

valeurs absolues, $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient $F(1) = -\frac{\pi^2}{12}$ puis

$$G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{\pi^2}{6}$$

c) Par décomposition en éléments simples

$$\frac{t-1}{(t+1)(t^2+2t\operatorname{ch}\theta+1)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}}{t+1} - \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}(t+\operatorname{ch}\theta)}{t^2+2t\operatorname{ch}\theta+1}$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \frac{\ln t}{t^2+2t\operatorname{ch}(\theta)+1} dt = \frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1} (F(1) - \frac{1}{2}G(e^\theta)) = \frac{\theta^2}{4(\operatorname{ch}(\theta)-1)}$$

Exercice 85 : [énoncé]

a) Par le changement de variable $t = xu$,

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t+x} dt = \int_0^1 \frac{\sin(xu)}{1+u} du$$

L'application $f : (x, u) \mapsto \frac{\sin(xu)}{1+u}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[\times [0, 1]$ et

$$|f(x, u)| \leq 1 = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $[0, 1]$.

Par domination, on peut conclure que g est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Puisque

$$\forall u \in [0, 1], \frac{\sin(xu)}{1+u} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0$$

on peut affirmer, toujours par domination, que

$$g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} \int_0^1 0 du = 0$$

La même technique ne s'applique pas pour l'étude en $+\infty$. On va alors transformer l'écriture de l'intégrale. Par intégration par parties

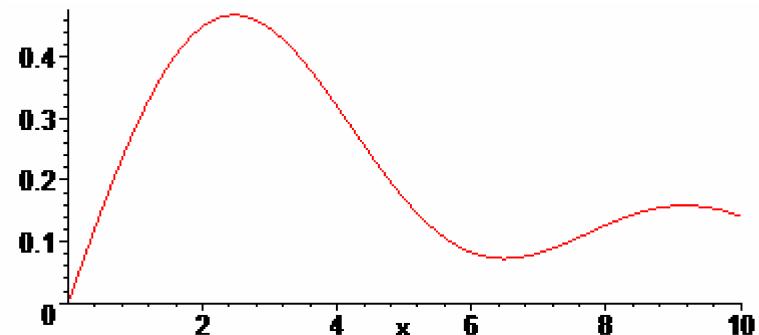
$$g(x) = \left[-\frac{\cos(t)}{x+t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt$$

Le terme entre crochets tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ et le terme intégrale aussi car

$$\left| \int_0^x \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt \right| \leq \int_0^x \frac{dt}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Ainsi

$$g(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$



Exercice 86 : [énoncé]

Considérons $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ définie sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$

Pour $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est fois dérivable sur $]0, +\infty[$ f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \frac{e^{-xt}}{1+t}$$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

De plus

$\forall x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux.

$\forall t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue.

Enfin, pour $[a, b] \subset [0, +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at}$$

avec $\varphi : t \mapsto e^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par domination sur tout segment, la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$-g'(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} t \frac{e^{-xt}}{1+t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

On peut aussi constater le résultat plus directement en procédant aux changements de variable $u = 1 + t$ puis $v = ux$ ce qui ramène l'expression étudiée à une primitive

$$g(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv$$

et on peut alors vérifier la satisfaction de l'équation différentielle.

Exercice 87 : [énoncé]

a) L'application $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1[$.
Quand $t \rightarrow 0^+$,

$$\frac{t-1}{\ln t} t^x = o(t^x)$$

Quand $t \rightarrow 1^-$,

$$\frac{t-1}{\ln t} t^x \rightarrow 1$$

L'application $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ est donc intégrable sur $]0, 1[$

Donc g est bien définie.

b) Posons $f(x, t) = \frac{t-1}{\ln t} e^{x \ln t}$.

$\forall x > -1$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$ comme vu ci-dessus.

La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (t-1)e^{x \ln t}$$

$\forall x > -1$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$,

$\forall t \in]0, 1[, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]-1, +\infty[$.

Pour $[a, b] \subset]-1, +\infty[$

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, 1[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq (1-t)t^a = \varphi_a(t)$$

avec φ_a continue par morceaux et intégrable.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, +\infty[$ et

$$g'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

c) Par intégration

$$g(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + C$$

Etudions $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ peut être prolongée par continuité sur $[0, 1]$, elle y est donc bornée par un certain M et alors

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 Mt^x dx = \frac{M}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit $C = 0$.

Exercice 88 : [énoncé]

Posons

$$u(x, t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x$$

définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R} \times]0, 1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
Puisque

$$u(x, t) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{t^x}{\ln t} \text{ et } u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} 1$$

la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $x > -1$.

De plus, cette fonction est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction intégrande.

On en déduit que la fonction f est définie sur $]-1, +\infty[$.

La fonction u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en t .

Pour $[a, b] \subset]-1, +\infty[$, on a

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, 1[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq (1-t)t^a$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, +\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On en déduit

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1} + C$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$$

est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1, elle est donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}^+$ et alors

$$|f(x)| \leq \int_0^1 Mt^x dt = \frac{M}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit $C = 0$ puis finalement

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}$$

Exercice 89 : [énoncé]

a) Considérons $f : (x, t) \mapsto \frac{t^x - 1}{\ln t}$ définie sur $]-1, +\infty[\times]0, 1[$.
Soit $x > -1$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.

Quand $t \rightarrow 1^-$.

$t = 1 - h$ avec $h \rightarrow 0^+$.

$$f(x, t) = \frac{(1-h)^x - 1}{\ln(1-h)} \rightarrow x$$

et donc f est intégrable sur $[1/2, 1[$.

Quand $t \rightarrow 0^+$.

On a

$$t^x \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \in]-1, 0[\end{cases}$$

Si $x \geq 0$, on obtient $f(x, t) \rightarrow 0$ ce qui permet un prolongement par continuité.

Si $x < 0$, on a $f(x, t) = o(t^x) = o(1/t^{-x})$ avec $-x < 1$.

Dans les deux cas, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1/2]$.

Finalement $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$ et donc g est définie sur $]-1, +\infty[$.

b) La fonction $x \mapsto f(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln t}$ est dérivable donc f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^x$$

$\forall x \in]-1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$

$\forall t \in]0, 1[$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]-1, +\infty[$.

Soit $[a, b] \subset]-1, +\infty[$. Pour $x \in [a, b]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t^a = \varphi(t)$$

avec $\varphi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$.

Par domination sur tout segment, g est de classe \mathcal{C}^1 et

$$g(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

On en déduit

$$g(x) = g(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$$

Exercice 90 : [énoncé]

a) $\cos(xt)e^{-t} = \operatorname{Re}(e^{(-1+i.x)t})$ et $|\cos(xt)e^{-t}| = e^{-t}$ qui est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Par suite $\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$ existe et

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+i.x)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-i.x} \right) = \frac{1}{1+x^2}$$

b) $g(x, t) = \frac{\sin xt}{t} e^{-t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

$t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$ donc la fonction F est bien définie sur \mathbb{R} .

$\frac{\partial g}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} et pour tout $x > 0$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = |\cos xt \cdot e^{-t}| = e^{-t} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur \mathbb{R}^{+*} .

Par domination F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \frac{1}{1+x^2}$$

c) $F(0) = 0$ donc $F(x) = \arctan x$.

Exercice 91 : [énoncé]

La fonction $u(x, t) = e^{(ix-1)t}/\sqrt{t}$ définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.
 $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$u(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } t^2 u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

On en déduit que la fonction donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}} dt = f(x) + ig(x)$$

est définie sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto u(x, t)$ est dérivable sur \mathbb{R} pour chaque $t \in]0, +\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t}e^{(ix-1)t}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} pour chaque $t \in]0, +\infty[$,

$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| = \sqrt{t}e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2 \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Par domination, on peut affirmer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{(ix-1)t} dt$$

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{2(x+i)} F(x)$$

La résolution de cette équation différentielle donne

$$F(x) = F(0) \frac{e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2 + 1)^{1/4}}$$

Enfin, sachant

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on parvient à

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2 + 1)^{1/4}}$$

d'où les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2 + 1)^{1/4}} \cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2 + 1)^{1/4}} \sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right)$$

On peut encore éventuellement « simplifier » en exploitant

$$\cos x = \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}} \text{ pour } x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

ce qui donne

$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

et aussi

$$\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \text{signe}(x) \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

Exercice 92 : [énoncé]

$f : (x, t) \rightarrow \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$.
 $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

Pour $a > 0$,

$$\forall x \in [a, +\infty[\quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Par domination $x \mapsto F(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt} dt = -\frac{1}{x}$$

Donc $F(x, y) = -\ln x + C^{te}$ et puisque pour $x = y$, on a $F(x, y) = 0$ on obtient

$$F(x, y) = \ln y - \ln x$$

Exercice 93 : [énoncé]

a) Posons

$$\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

La fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2 \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Par domination, on obtient que F est définie sur $I = \mathbb{R}$.

b) Posons $f(x, t) = \varphi(t) \cos(xt)$. f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -(e^{-t} - e^{-2t}) \sin(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t} + e^{-2t} = \psi(t)$ avec ψ intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que F est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -(e^{-t} - e^{-2t}) \sin(xt) dt$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(xt) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-a+ix)t} dt \right) = \frac{x}{a^2 + x^2}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4+x^2}{1+x^2} \right) + C^{te}$$

Montrons que $F(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Par intégration par parties

$$F(x) = \left[\varphi(t) \frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \sin(xt) dt$$

On en déduit

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

Par suite $C^{te} = 0$ puis

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{4+x^2}{1+x^2}$$

Exercice 94 : [énoncé]On définit $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$$

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.Quand $t \rightarrow +\infty$, $t^2 f(x, t) \rightarrow 0$ et quand $t \rightarrow 0^+$, $f(x, t) \rightarrow b - a$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.b) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(yt)$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} + e^{-bt} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable.On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt) dt$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-ct} \sin(xt) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-c+ix)t} dt \right) = \frac{x}{c^2 + x^2}$$

donc

$$F'(x) = \frac{x}{x^2 + b^2} - \frac{x}{x^2 + a^2}$$

c) On en déduit

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \right) + C^{te}$$

Pour déterminer la constante, on étudie la limite de F en $+\infty$. Posons

$$\psi(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$$

ce qui définit une fonction de classe \mathcal{C}^1 intégrable ainsi que sa dérivée sur $]0, +\infty[$.

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) \cos(xt) dt = \frac{1}{x} [\psi(t) \sin(xt)]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt) dt$$

et donc

$$\left| \int_0^{+\infty} \psi(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |\psi'(t)| dt \rightarrow 0$$

On peut conclure

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \right)$$

Exercice 95 : [énoncé]

- a) On réalise le changement de variable $u = \sqrt{t}$. On obtient $z(0) = \sqrt{\pi}$.
 b) $t \mapsto g(x, t) = \frac{e^{(-1+i.x)t}}{\sqrt{t}}$ est définie, continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable.
 g admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = i \cdot \sqrt{t} e^{(-1+ix)t}$$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
 $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t} e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

La fonction z est donc définie et de classe \mathcal{C}^1 avec

$$z'(x) = \int_0^{+\infty} i \cdot \sqrt{t} e^{(-1+i.x)t} dt \stackrel{\text{ipp}}{=} \frac{i}{2(1-ix)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+i.x)t}}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2(x+i)} z(x)$$

c)

$$\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x) = C \exp \left(i \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) \right) = \frac{C e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Puisque $z(0) = \sqrt{\pi}$, on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Exercice 96 : [énoncé]

Posons

$$f(x, t) = e^{-t^2} e^{tx}$$

La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

et donc la fonction g est définie sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t e^{-t^2} e^{tx}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue.

Pour $a \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\forall (x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq |t| e^{a|t|} e^{-t^2} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur \mathbb{R} indépendant de x .

On en déduit que la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 et par une intégration par parties

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} e^{tx} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} e^{tx} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-t^2} e^{tx} dt$$

On en déduit que g est solution de l'équation différentielle

$$g'(x) - \frac{1}{2} x g(x) = 0$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$g(x) = \lambda e^{x^2/4}$$

Enfin $g(0) = \sqrt{\pi}$ donne $\lambda = \sqrt{\pi}$.

Exercice 97 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x, t) = e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt)$$

La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

et donc la fonction F est définie sur \mathbb{R} .

b) La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt)$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue.

Soit $a \in \mathbb{R}^+$.

$$\forall (x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2a \operatorname{sh}(2a|t|) e^{-t^2} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur \mathbb{R} indépendant de x .

On en déduit que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 et par une intégration par parties

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt) dt = \left[-e^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt) \right]_0^{+\infty} + 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$$

On en déduit que F est solution de l'équation différentielle

$$F'(x) - 2xF(x) = 0$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$F(x) = \lambda e^{x^2}$$

avec $F(0) = \sqrt{\pi}/2$.

c) On sait

$$\forall x, t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(2xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (xt)^{2n}$$

Posons $u_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$u_n(t) = \frac{2^{2n}}{(2n)!} (xt)^{2n} e^{-t^2}$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt)$ elle-même continue par morceaux.

Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{2^{2n} |x|^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$$

Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} t^{2n-1} \times t e^{-t^2} dt = \frac{2n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{2(n-1)} e^{-t^2} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{|x|^{2n}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Il y a alors convergence de la série $\sum \int |u_n|$ et donc on peut intégrer terme à terme ce qui fournit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$$

Exercice 98 : [énoncé]

Posons $g(x, t) = \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2}$.

$x \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ,

$t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,

$|g(x, t)| \leq \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2}$ sur $[-a, a]$ avec $t \mapsto \frac{\ln(1+x^2 t^2)}{1+t^2}$ intégrable.

Par domination sur tout segment, on peut donc affirmer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Il est évident que f est paire. Nous poursuivons son étude sur \mathbb{R}^+ .

$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2xt^2}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)}$ est bien définie.

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}^+ ,

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Enfin $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2bt^2}{(1+a^2 t^2)(1+t^2)}$ sur $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$ avec $t \mapsto \frac{2bt^2}{(1+a^2 t^2)(1+t^2)}$ intégrable.

Par domination sur tout segment de $\mathbb{R}^{+\star}$, on peut affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} dt$

En réalisant la décomposition en éléments simples (pour $x \neq 1$),

$f'(x) = \frac{\pi}{x+1}$ et cette relation est aussi valable pour $x = 1$ par continuité.

Sachant que $f(0) = 0$ et que f est paire, on obtient $f(x) = \pi \ln(1 + |x|)$.

Exercice 99 : [énoncé]

a) Posons $f(x, t) = \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t))$ définie sur $]0, +\infty[\times [0, \pi/2]$.

Pour chaque $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ étant continue par morceaux sur $[0, \pi/2]$, l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie.

Pour chaque $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x \sin^2(t)}{\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)}$$

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, \pi/2], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b}{\cos^2(t) + a^2 \sin^2(t)} = \varphi_{a,b}(t)$$

avec la fonction $\varphi_{a,b} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable. Par domination sur tout segment, F est de classe \mathcal{C}^1 et

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x \sin^2(t)}{\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)} dt$$

Par le changement de variable \mathcal{C}^1 bijectif $u = \tan t$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2 x}{(1 + x^2 u^2)(1 + u^2)} du$$

Par décomposition en éléments simples (si $x \neq 1$)

$$\frac{2xX}{(1 + x^2 X)(1 + X)} = \frac{2x/(x^2 - 1)}{1 + X} - \frac{2x/(x^2 - 1)}{1 + x^2 X}$$

et donc

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} - \frac{1}{1 + x^2 u^2} du = \frac{\pi}{x + 1}$$

et la relation vaut aussi pour $x = 1$ par argument de continuité.

On en déduit

$$F(x) = \pi \ln(x + 1) + C^{te}$$

Sachant $F(1) = 0$, on conclut

$$F(x) = \pi \ln\left(\frac{x + 1}{2}\right)$$

Exercice 100 : [énoncé]

Posons

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1 + x \cos t)}{\cos t} dt$$

Pour $|x| > 1$, l'intégrale ne peut pas être définie.

Pour $|x| \leq 1$

En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.

Pour $x = -1$:

Quand $t \rightarrow 0^+$, $\ln(1 - \cos t) \sim 2 \ln t$

Quand $t \rightarrow 2\pi^-$, $t = 2\pi - h$, $\ln(1 - \cos t) = \ln(1 - \cos h) \sim 2 \ln h$

Pour $x = 1$, quand $t \rightarrow \pi$, $t = \pi + h$, $\ln(1 + \cos t) = \ln(1 - \cos h) \sim 2 \ln h$.

Finalement f est définie sur $[-1, 1]$.

Pour des raisons de symétrie,

$$f(x) = 2 \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + x \cos t)}{\cos t} dt$$

Par domination sur $[-a, a]$ avec $a < 1$, f est \mathcal{C}^1 sur $]-1, 1[$ et

$$f'(x) = 2 \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + x \cos t}$$

Par le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$,

$$f'(x) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2) + x(1 - u^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = 2\pi \arcsin x$.

Exercice 101 : [énoncé]

a) $f(x, t) = \ln(1 + x \sin^2 t)$ est définie et continue sur $[0, +\infty[\times [0, \pi/2]$.

Soit $[a, b] \subset [0, +\infty[$,

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, \pi/2], |f(x, t)| \leq \ln(1 + b) = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0, \pi/2]$

Par domination sur tout segment, on obtient F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

b) f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin^2 t}{1 + x \sin^2 t}$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, \pi/2], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1 = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0, \pi/2]$ et donc, par domination, F est de classe \mathcal{C}^1 avec

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1+x \sin^2 t} dt$$

Par le changement de variable $u = \tan t$ \mathcal{C}^1 strictement croissant

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)} du$$

Après décomposition en éléments simples et calcul,

$$F'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$$

c) On remarque que

$$\ln(1+\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$$

donc

$$F(x) = \pi \ln(1+\sqrt{1+x}) + C^{te}$$

sur \mathbb{R}^+ .

Par continuité en 0 et sachant $F(0) = 0$, on parvient à conclure.

Exercice 102 : [énoncé]

$t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,

$x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} et pour $x \in [-a, a]$

$$\left| \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \right| \leq \frac{|\ln(a^2+t^2)| + |\ln(t^2)|}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par suite f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Il est immédiat que f est paire. Poursuivons, en étudiant f sur $\mathbb{R}^{+\star}$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \right) = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

$t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,

$x \mapsto t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur \mathbb{R} et pour $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$,

$$\left| \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} \right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable. Par suite f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Pour $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2} \right)$$

donc

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{x+1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 1$ par continuité.

En procédant au changement de variable $u = 1/t$, on obtient $f(0) = 0$ et donc on peut conclure

$$f(x) = \pi \ln(x+1)$$

pour $x \in \mathbb{R}^+$ en exploitant un argument de continuité.

Exercice 103 : [énoncé]

a) Posons

$$g(x, t) = \frac{\ln(1+2t \cos x + t^2)}{t}$$

Puisque $\cos x \geq 0$,

$$1+2t \cos x + t^2 \geq 1+t^2$$

donc $t \mapsto g(x, t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1]$.

De plus

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2t \cos x + t^2)}{t} = \cos x$$

on peut donc prolonger $t \mapsto g(x, t)$ par continuité en 0. Par suite $F(x)$ est bien définie.

La dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $[0, \pi/2] \times]0, 1]$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2 \sin x}{1+2t \cos x + t^2}$$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$,

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ et

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2 = \varphi(t)$$

avec φ est intégrable. Par domination F est de classe \mathcal{C}^1 .

b) Pour $x = 0$, $F'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$,

$$F'(x) = - \int_0^1 \frac{2 \sin x}{1 + 2t \cos x + t^2} dt = - \int_0^1 \frac{2 \sin x}{(t + \cos x)^2 + \sin^2 x} dt = - \left[2 \arctan \frac{t + \cos x}{\sin x} \right]_0^1$$

Or

$$\arctan \frac{\cos x}{\sin x} = \arctan(\tan(\pi/2 - x))$$

avec $\pi/2 - x \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc

$$\arctan \frac{\cos x}{\sin x} = \pi/2 - x$$

et

$$\arctan \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \arctan \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \pi/2 - x/2$$

Finalement

$$F'(x) = 2((\pi/2 - x) - (\pi/2 - x/2)) = -x$$

c)

$$F(0) = \int_0^1 \frac{2 \ln(1+t)}{t} dt = 2 \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt$$

or la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} t^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ puisque la série numérique satisfait au critère spécial ce qui permet d'écrire

$$|R_N(t)| \leq \frac{t^{n+1}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

d'où $\|R_N\|_\infty \rightarrow 0$.

Par suite

$$F(0) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

puis

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x^2}{2}$$

Exercice 104 : [énoncé]

a) Posons

$$g_n(x, t) = \frac{1}{(x^2 + t^2)^n}$$

$t \rightarrow g_n(x, t)$ est définie continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ et $g_n(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ donc l'intégrale définissant $I_n(x)$ existe.

$$I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \left[\frac{1}{x} \arctan \frac{t}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$$

c) $\frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t) = \frac{-2nx}{(x^2 + t^2)^{n+1}}$ existe sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

$t \mapsto \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et pour tout $0 < a < b$,

$$\forall x \in [a, b], \left| \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2nb}{(a^2 + t^2)^{n+1}} = \varphi_{a,b}(t)$$

avec $\varphi_{a,b}$ intégrable sur \mathbb{R}^+ . Par domination sur tout segment, I_n est de classe C^1 sur $[a, b]$ puis sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$I'_n(x) = -2nx I_{n+1}(x)$$

d) $I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n+1}}$ avec $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda_{n+1} = \frac{2n+1}{2n} \lambda_n$ d'où

$$\lambda_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \pi$$

Exercice 105 : [énoncé]

a) Posons $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \exp \left(- \left(t^2 + \frac{x^2}{t^2} \right) \right)$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et

$$|f(x, t)| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut donc affirmer que F est définie et continue sur \mathbb{R} .

b) $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x}{t^2} \exp \left(- \left(t^2 + \frac{x^2}{t^2} \right) \right)$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et pour $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b}{t^2} \exp \left(- \frac{a^2}{t^2} \right) \exp(-t^2) = \varphi_{a,b}(t)$$

La fonction $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (notamment car de limite nulle en 0^+) donc on peut affirmer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$F'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt$$

c) Procérons au changement de variable $u = x/t$ (bijection de classe \mathcal{C}^1)

$$F'(x) = -2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{x^2}{u^2} + u^2\right)\right) du = -2F(x)$$

d) On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x > 0, F(x) = \lambda e^{-2x}$$

Puisque F est paire et continue en 0, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = F(0)e^{-2|x|}$$

Exercice 106 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $O(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur \mathbb{R}^+

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$, donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.

Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

Exercice 107 : [énoncé]

$S \times [a, b]$ est compact et toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Etudions la continuité de F en $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons $S = [\alpha - 1, \alpha + 1]$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, t), (x', t') \in S \times [a, b], \|(x, t) - (x', t')\|_{\infty} \leq \eta \Rightarrow |f(x, t) - f(x', t')| \leq \varepsilon$$

Donc pour $|x - \alpha| \leq \eta$, on a

$$|F(x) - F(\alpha)| \leq \int_a^b \varepsilon dt = \varepsilon(b-a)$$

Ainsi F est continue en α .

$(x, t) \mapsto e^{xt}$ est continue par opérations donc g l'est aussi par intégration sur un segment.

Pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ et $g(0) = 1$.

Sans difficultés, on vérifie g est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 108 : [énoncé]

Réalisons le changement de variable $t = u(x) + \theta(v(x) - u(x))$

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt = (v(x) - u(x)) \int_0^1 f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x))) d\theta$$

Considérons la fonction

$$g : (x, \theta) \mapsto f(x, u(x) + \theta(v(x) - u(x)))$$

Pour $[a, b] \subset I$, la fonction g est continue sur le compact $[a, b] \times [0, 1]$ et donc bornée. Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall (x, \theta) \in [a, b] \times [0, 1], |g(x, \theta)| \leq M = \varphi(\theta)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0, 1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 g(x, \theta) d\theta$$

On en déduit la continuité de la fonction étudiée par produit.

Exercice 109 : [énoncé]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt \underset{t=xu}{=} x \int_0^1 f'(xu) du$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \int_0^1 f'(xu) du$$

Posons $h(x, u) = f'(xu)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

La fonction h admet des dérivées partielles $\frac{\partial^n h}{\partial x^n}$ à tout ordre n avec

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, u) = u^n f^{(n+1)}(xu)$$

Celles-ci sont continues en x et continues par morceaux en u .

Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Puisque la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[-a, a]$, elle y est bornée et donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall (x, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x, u) \right| \leq M = \varphi(u)$$

Puisque la fonction φ est intégrable, on peut affirmer par domination sur tout segment, que la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 f'(xu) du$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\int_0^1 f'(xu) du \right) = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(xu) du$$

On en déduit que la fonction g se prolonge en une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(0) du = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

Exercice 110 : [énoncé]

a) On applique la formule de Taylor reste-intégrale à f en a .

b) On réalise le changement de variable $t = a + \theta(x - a)$ et l'on obtient

$$f(x) = (x - a)^\alpha \int_0^1 \frac{(1 - \theta)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} f^{(\alpha)}(a + \theta(x - a)) d\theta$$

Posons

$$h(x, \theta) = \frac{(1 - \theta)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} f^{(\alpha)}(a + \theta(x - a))$$

La fonction h admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, \theta) = \frac{(1 - \theta)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} (x - a)^k f^{(\alpha+k)}(a + \theta(x - a))$$

Celles-ci sont continues en x et continues par morceaux en θ .

Soit $[a - b, a + b] \subset \mathbb{R}$. La fonction $f^{(\alpha+k)}$ est continue sur ce segment et y est donc bornée par un certain M .

Puisque

$$\forall x \in [a - b, a + b], \forall \theta \in [0, 1], a + \theta(x - a) \in [a - b, a + b]$$

on a

$$\forall (x, \theta) \in [a - b, a + b] \times [0, 1], \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, \theta) \right| \leq M = \varphi(\theta)$$

avec φ fonction intégrable sur $[0, 1]$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que la fonction

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{(1 - \theta)^{\alpha-1}}{(\alpha - 1)!} f^{(\alpha)}(a + \theta(x - a)) d\theta$$

est de classe \mathcal{C}^∞ .

Exercice 111 : [énoncé]

a) $t \mapsto g(x, t) = e^{(-1+ix)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Puisque $t \mapsto |g(x, t)| = e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, la fonction z est bien définie.

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = it^2 e^{(-1+ix)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t^2 e^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

La fonction z est donc définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec

$$z'(x) = \int_0^{+\infty} it^2 e^{(-1+ix)t^2} dt \underset{\text{IPP}}{=} -\frac{1}{2(x+i)} z(x)$$

b) En multipliant par la quantité conjuguée

$$\frac{-1}{2(x+i)} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x) = C \exp \left(i \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) \right) = \frac{C e^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Puisque $z(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(\arctan x)/2}}{2(x^2+1)^{1/4}}$$

Exercice 112 : [énoncé]

Posons

$$f(x, t) = e^{-t^2} e^{itx}$$

La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car

$$t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$$

et donc la fonction g est définie sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = it e^{-t^2} e^{itx}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq |t| e^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur \mathbb{R} indépendant de x .

On en déduit que la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 et par une intégration par parties

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} it e^{-t^2} e^{itx} dt = \left[-\frac{i}{2} e^{-t^2} e^{itx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-t^2} e^{itx} dt$$

On en déduit que g est solution de l'équation différentielle

$$g'(x) + \frac{1}{2} x g(x) = 0$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$g(x) = \lambda e^{-x^2/4}$$

Enfin $g(0) = \sqrt{\pi}$ donne $\lambda = \sqrt{\pi}$.

Exercice 113 : [énoncé]

a) Posons $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \frac{e^{itx}}{1+t^2}$$

La fonction f est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que φ est définie et continue sur \mathbb{R} .

b) Par intégration par parties

$$\varphi(x) = -\frac{1}{ix} + \frac{1}{ix} \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$$

La fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en vertu de la domination

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} \right) \right| = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{2}{1+t^2}$$

On en déduit que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* avec

$$\varphi'(x) = \frac{1}{ix^2} - \frac{1}{ix^2} \int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$$

Or par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{e^{itx}}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} + ix \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

donc

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - 1}{(1+t^2)^2} e^{itx} dt$$

Enfin, une dernière intégration par parties donne

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} \left[-\frac{2t}{1+t^2} e^{itx} \right]_0^{+\infty} + i \int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2} e^{itx} dt$$

et la relation voulue...

c) Par le changement de variable $u = tx$, on obtient l'expression proposée. On peut décomposer

$$\varphi'(x) = i \int_0^1 \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du + \int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du$$

D'une part, par intégration par parties

$$\int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du = \left[\frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - u^2}{(x^2 + u^2)^2} e^{iu} du$$

avec

$$\left[\frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} \right]_1^{+\infty} = -\frac{e^i}{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -e^i$$

et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - u^2}{(x^2 + u^2)^2} e^{iu} du \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^2 - x^2}{(x^2 + u^2)^2} du = \frac{1}{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

D'autre part

$$\int_0^1 \frac{ue^{iu}}{x^2 + u^2} du = \int_0^1 \frac{u}{x^2 + u^2} du + \int_0^1 \frac{u(e^{iu} - 1)}{x^2 + u^2} du$$

avec

$$\int_0^1 \frac{u}{x^2 + u^2} du = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + u^2) \right]_0^1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{u(e^{iu} - 1)}{x^2 + u^2} du \right| \leq \int_0^1 \frac{|e^{iu} - 1|}{u} du < +\infty$$

Au final

$$\varphi'(x) = i \ln x + o(\ln x) + O(1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} i \ln x$$

d) En vertu de ce qui précède

$$\operatorname{Im}(\varphi'(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x \rightarrow -\infty$$

On en déduit que la fonction réelle $\operatorname{Im} \varphi$ n'est pas dérivable en 0, il en est a fortiori de même de φ .

Exercice 114 : [énoncé]

Posons $u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$.

a) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc intégrable sur $[0, +\infty[$. La fonction f est définie sur \mathbb{R} .

b) La fonction $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ et $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

Pour $x \in [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2}$$

avec $t \mapsto te^{-t^2}$ intégrable sur $[0, +\infty[$, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$$

Par intégration par parties impropre justifiée par deux convergences,

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} xe^{-t^2} \cos(xt) dt = -\frac{1}{2} x f(x)$$

f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $f(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

c) On peut écrire

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2} dt$$

$$\text{Posons } u_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n} e^{-t^2}.$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux sur \mathbb{R}^+ .

La série $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $t \mapsto e^{-t^2} \cos(xt)$ elle aussi continue par morceaux.

Les fonctions u_n sont intégrables sur \mathbb{R}^+ et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$$

Par intégration par parties impropre justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{2n-1}{2} \int_0^{+\infty} t^{2(n-1)} e^{-t^2} dt$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Cette quantité étant sommable, on peut intégrer terme à terme et on retrouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$$

Exercice 115 : [énoncé]

Posons $u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$.

La fonction u est définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -te^{-t^2} \sin(xt)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

$\forall t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

Enfin

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par domination, la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 et

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$$

Procérons à une intégration par parties avec les fonctions \mathcal{C}^1

$$u(t) = \frac{1}{2} e^{-t^2} \text{ et } v(t) = \sin(xt)$$

Puisque le produit uv converge en 0 et $+\infty$, l'intégration par parties impropre est possible et

$$g'(x) = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

Ainsi on obtient

$$g'(x) = -\frac{1}{2} x g(x)$$

g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $g(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{1}{4} x^2}$$

Exercice 116 : [énoncé]

Posons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

La fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ car

$$t^a (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ pour } a \in]1-x, 1[\text{ et } t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour $[a, b] \subset]0, +\infty[$,

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq (\ln t)^k (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t} = \varphi(t)$$

car

$$t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1} \text{ que } t \leq 1 \text{ ou } t \geq 1$$

La fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$

Exercice 117 : [énoncé]

a) Posons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable car

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

La fonction Γ est donc définie sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$

Pour $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ ou $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ selon que $t \leq 1$ ou $t \geq 1$ et donc

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, |f(x, t)| \leq f(a, t) + f(b, t) = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable et donc, par domination sur tout segment, Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

car

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

b) Pour $k = 1$ ou 2 .

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \text{ existe et } \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$$

Pour tout $x > 0$: $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ car

$$t^a \ln(t) t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0 \text{ pour } a \in]1-x, 1[\text{ et } t^2 \times \ln(t) t^{x-1} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t .

Pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq (\ln t)^2 (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t} = \varphi(t)$$

Par des arguments analogues aux précédents, on obtient que φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ avec

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$$

c) La dérivée seconde de $\ln \Gamma(x)$ est du signe de

$$\Gamma''(x) \Gamma(x) - \Gamma'(x)^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^{+\infty} \sqrt{t^{x-1} e^{-t}} \sqrt{(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}} dt \right) dt \leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right)$$

Ainsi

$$\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x)$$

et donc

$$(\ln \Gamma(x))'' \geq 0$$

Finalement $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ est convexe.

Exercice 118 : [énoncé]

a) Puisque $\ln(1+u) \leq u$, on a

$$0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1) \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq \exp\left(-(n-1) \frac{t}{n}\right) = e^{-t} e^{t/n} \leq e \cdot e^{-t}$$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\ln(t) e^{-t}$ est limite simple de la suite de fonction (u_n) définie

par $u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ si $t \in]0, n[$ et $u_n(t) = 0$ sinon.

Puisque $|\ln(t) u_n(t)| \leq e \cdot \ln(t) e^{-t}$, par convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

c) Par le changement de variable $u = nt$

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt = \int_0^1 n (1-u)^{n-1} \ln(nu) du$$

avec

$$\int_0^1 n (1-u)^{n-1} \ln(nu) du = \ln n + \int_0^1 n \ln(u) (1-u)^{n-1} du$$

et

$$\int_{\varepsilon}^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du = [\ln(u)(1-(1-u)^n)]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du$$

On notera que la fonction $u \mapsto n(1-u)^{n-1}$ est primitive en $(1-(1-u)^n)$ qui s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties donne à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du = \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du$$

d) Par le changement de variable $u = 1 - v$

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \int_0^1 \frac{v^n - 1}{v-1} dv = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k dv$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1)$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = -\gamma$$

Exercice 119 : [énoncé]

a) Posons $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

La fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ car

$$t^a (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ pour } a \in]1-x, 1[\text{ et } t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour $[a, b] \subset]0, +\infty[$,

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq (\ln t)^k (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t} = \varphi(t)$$

car

$$t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1} \text{ que } t \leq 1 \text{ ou } t \geq 1$$

La fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$

b) Par intégration par parties avec $u'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = t^x$, on obtient

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Sachant $\Gamma(1) = 1$, on obtient par récurrence $\Gamma(n+1) = n!$.

c) Par le changement de variable proposé

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy$$

avec

$$f_n(y) = 0 \text{ sur }]-\infty, -\sqrt{n}[, f_n(y) = e^{-y\sqrt{n}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \text{ sur }]-\sqrt{n}, +\infty[$$

Sur $]-\sqrt{n}, 0]$, une étude fonctionnelle montre $n \ln \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leq -\frac{y^2}{2}$ qui donne $0 \leq f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$.

Sur $[0, +\infty[$, une étude fonctionnelle montre $n \ln \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leq -y + \ln(1+y)$ pour $t \geq 1$. Cela donne $0 \leq f_n(y) \leq (1+y)e^{-y}$.

d) La fonction

$$\varphi : y \mapsto \begin{cases} e^{-y^2/2} & \text{si } y \leq 0 \\ (1+y)e^{-y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est intégrable sur \mathbb{R} .

Quand $n \rightarrow +\infty$, en réalisant un développement limité du contenu de l'exponentielle

$$f_n(y) = e^{-y\sqrt{n} + n \ln(1 + \frac{y}{\sqrt{n}})} \rightarrow e^{-y^2/2}$$

Par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$$

d'où

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$$

Exercice 120 : [énoncé]

a) La fonction Γ est définie sur \mathbb{R}^{+*} .

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Puisque $t^2 f(t) = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, la fonction f est assurément intégrable sur $[1, +\infty[$.

De plus, $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $x-1 > -1$ i.e. $x > 0$.

Ainsi f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

Enfin, la fonction f étant positive, l'intégrabilité équivaut à l'existence de l'intégrale.

b) Par intégration par parties

$$I_n(x) = \left[\frac{t^x}{x} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right]_0^n + \int_0^n \frac{t^x}{x} \frac{n}{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$$

En répétant l'opération

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)n^n} \int_0^n t^{x+n-1} dt$$

et finalement

$$I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

c) Quand $n \rightarrow +\infty$

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \rightarrow e^{-t}$$

Considérons la suite des fonctions

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \in [n, +\infty[\end{cases}$$

Soit $t > 0$ fixé. Pour n assez grand $t \in]0, n[$ et

$$f_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow t^{x-1} e^{-t}$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f introduite dans la première question.

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.

Enfin, pour $t \in]0, n[$, on a

$$|f_n(t)| = t^{x-1} \exp(n \ln(1 - t/n)) \leq t^{x-1} e^{-t} = f(t)$$

car il est connu $\ln(1 + u) \leq u$ pour tout $u > -1$. On a aussi $|f_n(t)| \leq f(t)$ pour $t \in [n, +\infty[$ et donc

$$\forall t \in]0, n[\quad |f_n(t)| \leq f(t)$$

La fonction f étant intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

on peut conclure

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Exercice 121 : [énoncé]

Notons que $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ est bien définie.

Pour tout $t \in]0, 1]$,

$$t^{x-1} e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \int_{]0, 1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et est de somme $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ continue par morceaux.

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0, 1]$ et

$$\int_{]0, 1]} |f_n(t)| dt = \frac{1}{n!(x+n)}$$

La série $\sum \int_{]0, 1]} |f_n|$ converge donc on peut intégrer terme à terme

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

Exercice 122 : [énoncé]

a) Introduisons la fonction

$$u : (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, 1] \mapsto \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$$

Pour chaque $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, \pi/2]$. La fonction f est donc bien définie.

La fonction u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x} : (x, t) \mapsto -e^{-x(1+t^2)}$$

Celle-ci est continue en x , continue par morceaux en t et vérifie

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, 1], \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1$$

La fonction $\varphi : t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, 1]$. Par domination, on peut alors affirmer que f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$$

b) On a

$$f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Pour $x \geq 0$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 e^{-x} dt = e^{-x}$$

donc $\lim_{+\infty} f = 0$.

c) g est de classe \mathcal{C}^1 par composition et

$$g'(x) = 2x f'(x^2) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

On a alors

$$\left(g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \right)' = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$$

car

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x \int_0^1 e^{-x^2 u^2} du$$

L'évaluation en 0 permet de conclure.

d) Pour $x \geq 0$, $\int_0^x e^{-t^2} dt \geq 0$ donc

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 123 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Soit $x \geq 0$. L'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et

$$0 \leq f(x, t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$$

donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale impropre définissant $F(x)$ est bien convergente.

b) Pour chaque $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{t} e^{-at} = \varphi(t)$$

avec $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable.

Par domination sur tout segment, F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} dt$$

On constate alors

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \underset{xt=u}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{I}{\sqrt{x}}$$

c) On a

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t=u^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2du}{1+u^2} = \pi$$

et

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt = \frac{I}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc, par encadrement, $F \xrightarrow{+\infty} 0$.

d) Après résolution (avec méthode de variation de la constante) de l'équation

$$y - y' = \frac{I}{\sqrt{x}}$$

avec la condition initiale $y(0) = \pi$, on obtient

$$\forall x \geq 0, F(x) = e^x \left(\pi - I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right)$$

La nullité de la limite de F en $+\infty$ impose alors

$$I \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pi$$

et donc

$$I = \sqrt{\pi}$$

Exercice 124 : [énoncé]

a) La fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ car

$$\varphi(t) = O(1/t^2) \text{ quand } t \rightarrow +\infty \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1/2$$

La fonction $g : (x, t) \mapsto e^{-xt} \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times]0, +\infty[$ et dominée par φ donc F est continue.

De plus la fonction φ est bornée donc, pour $x > 0$

$$|F(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^x e^{-xt} dt = \frac{\|\varphi\|_\infty}{x}$$

et on en déduit que F tend vers 0 en $+\infty$.

b) Les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^{+\star} \times]0, +\infty[$.
 $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+\star}$

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 2e^{-at} = \psi(t)$$

La fonction ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par domination sur tout segment, F est de classe \mathcal{C}^2 et

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} (1 - \cos t) dt = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

c) On a

$$F'(x) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

car $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et

$$F(x) = x \ln x - x \ln \sqrt{x^2 + 1} - \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

car $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Par continuité, on obtient $F(0) = \pi/2$.

Par intégrations par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(t/2)}{t^2} dt = \left[-\frac{2 \sin^2(t/2)}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 125 : [énoncé]

a) Posons $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = 1/t$.

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et le produit uv converge en 0 et $+\infty$:

$$u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2} \rightarrow 0 \text{ et } u(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(1/t) \rightarrow 0$$

Par intégration par parties impropre, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt \text{ et } \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$$

sont de même nature. Or

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

converge car

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Cela permet de conclure à la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

b) Posons

$$f(x, t) = \frac{e^{-xt} \sin t}{t}$$

définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable car

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+ 1]{} \text{ et } t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty 0]{} 0$$

De plus, puisque $|\sin t| \leq t$ pour tout $t > 0$, on a

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty 0}$$

c) f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-xt} \sin(t)$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient F de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{it} dt \right)$$

on obtient

$$F'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

d) On en déduit

$$F(x) = -\arctan x + C^{te} \text{ sur }]0, +\infty[$$

et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

Par continuité en 0,

$$I = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 126 : [énoncé]

a) On réalise le changement de variable $t = u + n\pi$:

$$u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} e^{-x(u+n\pi)} \frac{\sin u}{u + n\pi} du$$

Ici

$$g_n(x, u) = e^{-x(u+n\pi)} \frac{\sin u}{u + n\pi}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $u \in [0, \pi]$, $g_n(x, u) \geq 0$ et $g_{n+1}(x, u) \leq g_n(x, u)$ donc $u_n(x) = (-1)^n |u_n(x)|$ avec $(|u_n(x)|)_{n \geq 0}$ décroissante. De plus

$$|u_n(x)| \leq \int_0^{\pi} \frac{du}{n\pi} = \frac{1}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

donc $|u_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Par application du critère spécial, la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge et

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

ce qui donne la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$.

c) La fonction g_n est continue en x , continue par morceaux en u et

$$\forall x \in [0, +\infty[\times [0, \pi], |g_n(x, u)| \leq |\sin u| \leq 1$$

Par domination, les fonctions u_n sont continues.

Comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur \mathbb{R}^+ , la fonction U est continue sur \mathbb{R}^+ . De plus, par sommation d'intégrales contiguës

$$U(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

avec cette intégrale qui est définie quand $x > 0$ et connue convergente quand $x = 0$.

d) Posons

$$h(x, t) = \frac{e^{-xt} \sin t}{t}$$

définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable car

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1 \text{ et } t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

h admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = e^{-xt} \sin(t)$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient U de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$U'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{it} dt \right)$$

on obtient

$$U'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

e) En intégrant

$$U(x) = C - \arctan x \text{ sur }]0, +\infty[$$

Or

$$|U(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc $C = \pi/2$.

Par continuité en 0,

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 127 : [énoncé]

a) Pour $x > 0$, $t^2 \frac{\sin t}{t} e^{-tx} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$.

Pour $x = 0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente bien que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.

b) Pour $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin t}{t} e^{-tx} \right) \right| \leq e^{-ax} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t) e^{-tx} dt = \operatorname{Im} \left(- \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

donc $f(x) = C - \arctan x$.

Or

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2}$$

d) En découplant l'intégrale, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$$

Posons

$$u_n(t) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établit que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction f , est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 128 : [énoncé]

a) Posons

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

Les fonctions \tilde{f} , $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$.

Pour chaque x , les fonctions $t \mapsto \tilde{f}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables. Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Sur $[a, b] \times [0, +\infty[$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que la fonction f est définie et de classe avec

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

On a alors

$$f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

Posons

$$\tilde{g}(x, t) = \frac{\sin t}{x+t}$$

Les fonctions \tilde{g} , $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \tilde{g}(x, t) dt$ est bien définie sur \mathbb{R}^+ (intégrale convergente via intégration par parties)

La fonction $t \mapsto \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x, t)$ est intégrable et sur $[a, b] \times [0, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2}{(a+t)^3} = \psi(t)$$

La fonction ψ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que g est de classe \mathcal{C}^2 et

$$g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin t}{(x+t)^3} dt$$

Par une intégration par parties

$$g''(x) = \left[-\frac{\sin t}{(x+t)^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x} - g(x)$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$|\tilde{f}(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

donc f est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .

$$g(x) - g(0) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt = - \left(x \int_0^1 \frac{\sin t}{t(x+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right)$$

mais

$$\left| x \int_0^1 \frac{\sin t}{t(x+t)} dt \right| \leq x \int_0^1 \frac{dt}{(x+t)} = x \ln(x+1) - x \ln x \rightarrow 0$$

et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x \sin t}{t(x+t)} dt \right| \leq x \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \rightarrow 0$$

donc g est continue en 0.

c) D'une part

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'autre part

$$|g''(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{2 |\sin t|}{(x+t)^3} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2 |\sin t|}{(x+t)^2} dt$$

et en prenant $x \geq 1$

$$|g''(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2 |\sin t|}{(1+t)^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{x} - g''(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $f - g \xrightarrow{+\infty} 0$ ce qui permet via résolution de l'équation différentielle de conclure

$$f = g$$

On en déduit $g(0) = f(0)$ i.e.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 129 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $O(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur \mathbb{R}^+

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$, donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.

Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

c) En intégrant par parties, on obtient $\pi \ln 2$.

Exercice 130 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x, t) = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$$

La fonction f est définie et continue sur $]-1, +\infty[\times [0, 1]$.

Pour $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $]-1, +\infty[\times [0, 1]$.

Par intégration sur un segment, on peut affirmer que la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$$

est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur $]-1, +\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} dt$$

Par décomposition en éléments simples (en la variable t)

$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{-x}{(x^2+1)(1+xt)} + \frac{x+t}{(x^2+1)(1+t^2)}$$

donc

$$F'(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x^2+1} + \frac{\pi}{4} \frac{x}{x^2+1} + \frac{\ln 2}{2} \frac{1}{1+x^2}$$

Puisque $F(0) = 0$, on peut écrire

$$F(x) = \int_0^x F'(t) dt = - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t^2+1} dt + \frac{\pi}{8} \ln(x^2+1) + \frac{\ln 2}{2} \arctan x$$

b) Pour $x = 1$, la relation précédente donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi \ln 2}{8}$$