

Equations différentielles linéaires

Résolution d'équation scalaire d'ordre 1

Exercice 1 [00382] [correction]

Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = 2x$$

Exercice 2 [03782] [correction]

Résoudre sur $]-\pi/2, \pi/2[$

$$y'(x) - \tan(x)y + (\cos x)^2 = 0$$

Exercice 3 [00376] [correction]

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' - y = \sin(2x)e^x$
- $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
- $y' + y \tan x = \sin 2x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

Exercice 4 [00377] [correction]

Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :

- $y' - (x+1)(y+1) = 0$ et $y(0) = 1$
- $(1+x^2)y' - (x+1)y = 2$ et $y(0) = -1$.

Exercice 5 [03505] [correction]

On considère l'équation

$$(E) : (1-x)y' - y = g$$

où $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est donnée.

- Résoudre l'équation homogène associée.
- On suppose que la fonction g est développable en série entière

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geq 1$.

Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière en 0,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geq 1$ et exprimer les a_n en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etude théorique d'équation d'ordre 1

Exercice 6 [00380] [correction]

Soit $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable.

Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 7 [00381] [correction]

a) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ converge vers 0 en $+\infty$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $f + f' \xrightarrow{+\infty} \ell$. Montrer que $f \xrightarrow{+\infty} \ell$.

Exercice 8 [03109] [correction]

Soient α un complexe de partie réelle strictement positive et une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f' + \alpha f$ tend vers 0 en $+\infty$.

Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 9 [04100] [correction]

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.

On étudie l'équation différentielle

$$(E) : y' + \alpha y = \varphi(t)$$

- Montrer que si y est solution sur \mathbb{R} de l'équation (E) alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi.
- En déduire qu'une solution y de (E) est T -périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.
- Montrer que l'équation (E) admet une unique solution T -périodique, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α que l'on précisera.

Résolution avec raccord d'équation d'ordre 1

Exercice 10 [00419] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(E) : x^2 y' - y = 0$$

Exercice 11 [00421] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation suivante

$$(e^x - 1)y' + e^x y = 1$$

Exercice 12 [03468] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation suivante

$$\operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = 1$$

Exercice 13 [00429] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$E : y' + y = \max(x, 0)$$

Exercice 14 [02889] [correction]

Résoudre

$$x \ln x y' - (3 \ln x + 1)y = 0$$

Exercice 15 [00420] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } xy' - y = x & \text{b) } xy' + y - 1 = 0 \\ \text{c) } xy' - 2y = x^4 & \text{d) } x(1 + x^2)y' - (x^2 - 1)y + 2x = 0 \end{array}$$

Exercice 16 [00422] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\text{a) } y' \sin x - y \cos x + 1 = 0 \quad \text{b) } (\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$$

Exercice 17 [00423] [correction]

Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :

- a) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 0$
 b) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 1$.

Exercice 18 [00424] [correction]

Résoudre sur tout intervalle de \mathbb{R} l'équation différentielle

$$x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$$

Exercice 19 [00425] [correction]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

en discutant selon les valeurs de α .

Exercice 20 [00105] [correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et g une solution sur \mathbb{R}^{+*} de l'équation différentielle

$$xy' - y = f(x)$$

- a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. Déterminer une condition nécessaire sur $f'(0)$ pour que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0. Démontrer que cette condition n'est pas suffisante.
 b) f est supposée de classe \mathcal{C}^2 et la condition précédente est vérifiée. Démontrer que g est de classe \mathcal{C}^2 .

Exercice 21 [00506] [correction]

Soit (E) l'équation différentielle

$$(\ln x)y' + \frac{y}{x} = 1$$

- a) Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
 b) Soit g la fonction définie sur $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Montrer que g se prolonge sur $] -1, +\infty[$ en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

- c) Démontrer que (E) admet une solution de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 22 [01369] [correction]

Soit α un paramètre réel. On désire résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$E : xy' = \alpha y$$

On considère $x \mapsto y(x)$ une solution de E sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et $\mathbb{R}^{-\ast}$.

a) Donner l'expression de $y(x)$ sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et sur $\mathbb{R}^{-\ast}$.

On notera C^+ et C^- les constantes réelles permettant d'exprimer $y(x)$ sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et $\mathbb{R}^{-\ast}$.

b) À quelles conditions sur les constantes C^+ et C^- , est-il possible de prolonger y par continuité en 0 ?

On distinguera trois cas, selon que $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.

c) Pour $\alpha > 0$, à quelles conditions sur les constantes C^+ et C^- la fonction prolongée y est-elle dérivable en 0 ?

On distinguera trois cas, selon que $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ ou $\alpha > 1$.

d) Résumer l'étude précédente en donnant la solution générale de E sur \mathbb{R} en fonction de α .

Résolution d'équation scalaire d'ordre 2

Exercice 23 [03240] [correction]

Soit $\alpha > 0$. Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$E_\alpha : x^2 y''(x) + xy'(x) - \alpha^2 y(x) = 0$$

On pourra étudier les fonctions propres de l'application

$$\varphi : y(x) \mapsto xy'(x)$$

Méthode de variation des constantes

Exercice 24 [00405] [correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

Exercice 25 [00406] [correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan t$$

Exercice 26 [00407] [correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan^2 t$$

Exercice 27 [02893] [correction]

Résoudre sur $]0, \pi[$

$$y'' + y = \cotan x$$

Exercice 28 [00408] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$y'' + y = f$$

On exprimera la solution à l'aide d'une intégrale.

b) Déterminer la solution telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 29 [02455] [correction]

a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

b) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 30 [00409] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$f + f'' \geq 0$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

Exercice 31 [02896] [correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique et solution de

$$y'' + y = f?$$

Exercice 32 [02895] [correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 33 [02894] [correction]

a) Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} par variation des constantes l'équation différentielle

$$y'' + y = 1/x$$

b) En déduire une expression de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{dt}{1+t^2}$$

valable pour $x > 0$.

c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Recherche de solution développable en série entières

Exercice 34 [01016] [correction]

a) Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

b) Exprimer parmi celles-ci, celles dont la somme est une fonction paire.

Exercice 35 [00401] [correction]

Résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation

$$4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = 0$$

en recherchant les fonctions développables en série entière.

Exercice 36 [00404] [correction]

a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0$$

en recherchant les séries entières solutions.

b) Résoudre ensuite

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 37 [02528] [correction]

a) Montrer qu'il existe une solution h de l'équation

$$xy'' + y' + y = 0$$

développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.

b) Montrer que h ne s'annule qu'une fois sur $]0, 2[$.

Wronskien

Exercice 38 [00394] [correction]

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{C}$ continues et (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de l'équation

$$E : y'' + a(t)y'(t) + b(t)y = 0$$

Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par le wronskien

$$w : t \mapsto \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

Exercice 39 [04001] [correction]

On étudie sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : ty'' + (1-2t)y' + (t-1)y = 0$$

a) Vérifier que $\varphi(t) = e^t$ détermine une solution de (E) .

b) Déterminer une expression du wronskien $w(t)$ des deux solutions de l'équation (E) .

c) En déduire une solution de (E) indépendante de φ et exprimer la solution générale de (E) .

Etude théorique d'équation d'ordre 2

Exercice 40 [01555] [correction]

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.

On se propose de montrer que les solutions sur \mathbb{R} de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ s'annulent.

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

a) Justifier que f est de signe constant.

Quitte à considérer $-f$ au lieu de f , on peut supposer

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

b) Etudier le signe de f'' .

c) Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?

d) Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a .

e) En déduire que $f'(a) = 0$ et conclure.

Exercice 41 [00402] [correction]

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.

Montrer que toute solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$ s'annule.

Exercice 42 [03779] [correction]

Soient q une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles et f une solution non nulle sur $[a, b]$ de l'équation différentielle

$$(E) : y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

Montrer que f admet un nombre fini de zéros.

Exercice 43 [03499] [correction]

Soient $p, q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle définie sur $[0, 1]$ suivante

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Montrer que si une solution possède une infinité de racines alors celle-ci est la fonction nulle.

Exercice 44 [03110] [correction]

Soient $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et g une solution non identiquement nulle de

$$E : y'' + fy = 0$$

a) Montrer que les zéros de g sont isolés.

Dans la suite, x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs de g vérifiant $x_1 < x_2$.

b) Montrer, si $x \in [x_1, x_2]$

$$(x_2 - x) \int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t) dt + (x - x_1) \int_x^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t) dt = (x_2 - x_1)g(x)$$

c) En déduire une minoration de

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt$$

Exercice 45 [00436] [correction]

Soient q une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$ et (E) l'équation différentielle

$$y'' + q(x)y = 0$$

a) Si f est une solution bornée de (E) sur $[0, +\infty[$, montrer que sa dérivée f' converge en $+\infty$.

Quelle est la valeur de sa limite?

b) Soient f et g deux solutions bornées. Étudier le wronskien de f et de g

$$w = f'g - fg'$$

En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure?

Exercice 46 [03671] [correction]

Soient $q_1, q_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant $q_1 \leq q_2$.

On note φ_1 et φ_2 deux solutions sur I respectivement des équations

$$y'' + q_1(x)y = 0 \text{ et } y'' + q_2(x)y = 0$$

On suppose la solution φ_1 non identiquement nulle.

a) Montrer que les zéros de φ_1 sont isolés i.e. que si $x_0 \in I$ annule φ_1 alors

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \varphi_1(x) = 0 \Rightarrow x = x_0$$

b) Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de φ_1 . Montrer que φ_2 s'annule sur $[a, b]$.

(indice : étudier $\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$)

c) Application : montrer que si φ est une solution non nulle de l'équation $y'' + e^x y = 0$ alors

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \exists x \in [a, a + \pi], \varphi(x) = 0$$

Exercice 47 [03100] [correction]

On considère l'équation différentielle

$$E_0 : y'' - e^x y = 0$$

a) Soit y une solution de E_0 sur \mathbb{R} . Etudier la convexité de y^2 .

En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$ alors y est nulle sur \mathbb{R} .

b) Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 telles que

$$(y_1(0), y_1'(0)) = (0, 1) \text{ et } (y_2(1), y_2'(1)) = (0, 1)$$

Démontrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0 .

c) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que l'équation différentielle

$$E : y'' - e^x y = f(x)$$

admet une unique solution y telle que

$$y(0) = y(1) = 0$$

Exercice 48 [03387] [correction]

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + \cos^2(t)y = 0$$

a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans \mathbb{R}^{-*} et \mathbb{R}^{+*} .

c) Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max \{t < 0 / u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min \{t > 0 / u(t) = 0\}$$

d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u .

En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans $]\gamma, \delta[$.

e) Soit w une solution non nulle de (E) . Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

[Enoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 49 [03920] [correction]

Soient $q \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ et (E) l'équation différentielle $y'' = q(x)y$.

a) Soit f une solution de (E) telle que $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$.

Montrer que f et f' sont strictement positives et que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

b) Soient u et v les solutions de (E) telles que

$$\begin{cases} u(a) = 1 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(a) = 1 \end{cases}$$

Calculer $u'v - uv'$. Montrer que, sur $]a, +\infty[$, u/v et u'/v' sont monotones de monotonies contraires. Montrer que u/v et u'/v' tendent en $+\infty$ vers la même limite réelle.

c) Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) , strictement positive, telle que $g(a) = 1$ et telle que g décroisse sur $[a, +\infty[$.

d) Déterminer g lorsque $q(x) = 1/x^4$ sur $[1, +\infty[$.

On pourra poser $y(x) = xz(1/x)$.

Problèmes se ramenant à la résolution d'équations différentielles

Exercice 50 [02535] [correction]

Quelles sont les fonctions continues f telles que

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x - t)f(t)dt ?$$

Exercice 51 [02419] [correction]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x - t)f(t) dt = 1 - x$$

a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .

b) Trouver toutes les fonctions f solution de l'équation étudiée.

Exercice 52 [00378] [correction]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x t f(t) dt + 1$$

Exercice 53 [02890] [correction]

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout x réel

$$f(x) - 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 1$$

Exercice 54 [01554] [correction]

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$$

Exercice 55 [02892] [correction]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x > 0, f'(x) = f(1/x)$$

Exercice 56 [03506] [correction]

Déterminer la dimension de l'espace

$$E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) = y(0) \cos(x)\}$$

Exercice 57 [03108] [correction]

Soient f une fonction réelle continue sur $[0, 1]$ et λ un réel.

Trouver u fonction réelle continue sur $[0, 1]$ telle que

$$u(x) = \lambda \int_0^x u(t) dt + f(x)$$

Exercice 58 [01553] [correction]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \text{ et } f(0) = 1$$

Résolution avec raccord d'équation d'ordre 2**Exercice 59** [00427] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$$

en commençant par rechercher les solutions polynomiales.

Exercice 60 [00428] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$E : (t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0$$

Exercice 61 [00426] [correction]

On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' - x^3 y = 0$$

a) Montrer que si y est solution sur I alors $x \mapsto y(-x)$ est solution sur I' symétrique de I par rapport à 0.

b) Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} l'équation via le changement de variable $t = x^2$.

c) Déterminer les solutions sur \mathbb{R} .

Exercice 62 [03501] [correction]

On étudie l'équation différentielle

$$(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$$

a) Déterminer les fonctions développables en série entière solutions

b) Résoudre (E) sur \mathbb{R}^{+*} et sur \mathbb{R}^{-*} en posant respectivement $x = t^2$ et $x = -t^2$.

c) Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 63 [01560] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$E : xy'' - (1+x)y' + y = 1$$

en posant $z = y' - y$.

Résolution par changement de fonction inconnue

Exercice 64 [01556] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$$

Exercice 65 [01561] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$E : (1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = xe^x$$

en posant $z(x) = (1 + e^x)y(x)$.

Exercice 66 [01559] [correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + e^x)^2y'' - 2e^x(1 + e^x)y' - (3e^x + 1)y = 0$$

en introduisant

$$z(x) = \frac{y(x)}{1 + e^x}$$

Exercice 67 [01558] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = e^{x^2}y(x)$.

Exercice 68 [00413] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} l'équation

$$x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$$

en posant $z = x^2y$.

Exercice 69 [03508] [correction]

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$$

en posant $y(x) = x^\alpha z(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.

Exercice 70 [00411] [correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(1 + e^x)y'' + y' - e^xy = 0$$

en introduisant la fonction $z = y' + y$.

Exercice 71 [00412] [correction]

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation

$$x^2y'' - 2y + \frac{3}{x} = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = xy'(x) + y(x)$.

Méthode de Lagrange

Exercice 72 [00395] [correction]

On étudie l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = t$$

- Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène associée.
- Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.
- Exprimer la solution générale de l'équation étudiée.

Exercice 73 [00396] [correction]

On étudie l'équation

$$(1 + t^2)^2y''(t) - 2t(1 + t^2)y'(t) + 2(t^2 - 1)y(t) = (1 + t^2)$$

- Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène.
- Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

Exercice 74 [00397] [correction]On étudie sur \mathbb{R}^{+*} l'équation

$$t^3 y'' + ty' - y = 0$$

- a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de cette équation.
 b) Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

Exercice 75 [00398] [correction]On étudie sur \mathbb{R}^{+*} l'équation différentielle

$$t^2 y'' + ty' - y = 1$$

- a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène.
 b) Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

Exercice 76 [00400] [correction]On étudie sur $]0, 1[$ l'équation

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$$

- a) Rechercher une solution non nulle $\varphi(x)$ développable en série entière.
 b) Terminer de résoudre l'équation par le changement de fonction inconnue $y(x) = \varphi(x)z(x)$

Exercice 77 [01319] [correction]On étudie l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$

$$(E) : xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$$

- a) Chercher une solution $\varphi(x)$ développable en série entière au voisinage de 0 et non nulle.
 b) Terminer de résoudre l'équation par le changement de fonction inconnue $y(x) = \varphi(x)z(x)$

Exercice 78 [03504] [correction]On étudie sur $]0, 1[$ l'équation différentielle suivante

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

- a) Rechercher une solution développable en série entière non nulle $\varphi(x)$.
 b) Achever de résoudre cette équation par le changement de fonction $y(x) = \varphi(x)z(x)$.

Résolution par changement de variable**Exercice 79** [00414] [correction]Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} l'équation

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

en posant $x = e^t$.**Exercice 80** [01566] [correction]Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} les équations suivantes via le changement de variable $t = \ln x$.

$$\text{a) } x^2 y'' + xy' - y = x^2 \quad \text{b) } x^2 y'' - 2y = x$$

Exercice 81 [00416] [correction]Résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos x$$

en procédant au changement de variable $x = \cos(t)$.**Exercice 82** [00415] [correction]Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(1+x^2)^2 y'' + 2(x-1)(1+x^2)y' + y = 0$$

en procédant au changement de variable $t = \arctan x$.**Exercice 83** [01564] [correction]Résoudre sur \mathbb{R}

$$(x^2+1)^2 y'' + 2x(x^2+1)y' + y = 0$$

via $t = \arctan x$.**Exercice 84** [00417] [correction]Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y'' + \frac{2t}{t^2+1}y' + \frac{1}{(t^2+1)^2}y = \frac{t}{(t^2+1)^2}$$

en posant $x = \arctan t$.

Exercice 85 [02573] [correction]

En indiquant les hypothèses nécessaires, effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'équation différentielle

$$(1 + t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$$

tel qu'elle devienne une équation à coefficients constants et la résoudre.

Exercice 86 [02540] [correction]

On veut résoudre

$$(E) : (x + 1)y'' - (3x + 4)y' + 3y = (3x + 2)e^{3x}$$

Si Δ est l'opérateur de dérivation et $Q(X) = X - 3$, on a $Q(\Delta)(y) = y' - 3y$. Montrer l'existence d'un polynôme P de la forme $a(x)X + b(x)$ tel que (E) devienne

$$(P(\Delta) \circ Q(\Delta))(y) = (3x + 2)e^{3x}$$

Résoudre l'équation à l'aide du changement de variable $z = Q(\Delta)(y)$.

Equations vectorielles d'ordre 1

Exercice 87 [00384] [correction]

Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $a \circ b = b \circ a$.

En considérant pour $x_0 \in E$, l'application $t \mapsto (\exp(ta) \circ \exp(tb))x_0$, établir

$$\exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b)$$

Exercice 88 [02900] [correction]

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la matrice A est antisymétrique ;
- (ii) chaque solution Y du système différentiel $Y' = AY$ est de norme constante.

Exercice 89 [01320] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$A^2 + I_{2n} = O_{2n}$$

Exprimer la solution générale de l'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t)$$

Exercice 90 [03670] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont aucune valeur propre n'est élément de $2i\pi\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $e^A - I_n$ est inversible.

Soit $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une fonction continue et 1-périodique.

b) Montrer que l'équation

$$(E) : X' = AX + B(t)$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ possède une unique solution 1-périodique.

Exercice 91 [03921] [correction]

a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p . Montrer que $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est une famille libre.

Exprimer

$$e^{t(\lambda I_n + N)}$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.

Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur \mathbb{R} si, et seulement si, λ est imaginaire pur et $A = \lambda I_n$.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_m)^{n_m}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à A . Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^m \ker(f - \lambda_k \text{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

En déduire l'existence d'une base de \mathbb{C}^n dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.

d) Avec les notations de c). Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.

e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable.

Systèmes différentiels d'ordre 1

Exercice 92 [00385] [correction]

Résoudre le système différentiel réel suivant

$$\begin{cases} x' = \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' = -\sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$$

Exercice 93 [00386] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'_1 = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x'_2 = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$$

Exercice 94 [00387] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'_1 = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$$

Exercice 95 [00388] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'_1 = (1+t)x_1 + tx_2 - e^t \\ x'_2 = -tx_1 + (1-t)x_2 + e^t \end{cases}$$

Systèmes différentiels d'ordre 1 à coefficients constants**Exercice 96** [00389] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Exercice 97 [03490] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + 3x_2 + e^t \\ x'_2 = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Exercice 98 [00390] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

Exercice 99 [00391] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 100 [00392] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 101 [02902] [\[correction\]](#)

Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Exercice 102 [04101] [\[correction\]](#)

On étudie le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' = z - y \\ y' = x - z \\ z' = y - x \end{cases}$$

- Ce système possède-t-il des solutions ?
- Sans résoudre le système, montrer que pour tout réel t , le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ se situe à l'intersection d'un plan et d'une sphère.
- Calculer A^3 et exprimer sous forme matricielle la solution générale du système (S) .

Exercice 103 [04102] [[correction](#)]

Soit A une matrice non inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \mapsto X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. Montrer que les valeurs prises par la fonction $t \mapsto X(t)$ sont incluses dans un hyperplan affine.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Solution homogène : $y_0(x) = C\sqrt{x^2 - 1}$.

Par variation de la constante, solution particulière $y_1(x) = 2(x^2 - 1)$.

Solution générale : $y(x) = C\sqrt{x^2 - 1} + 2(x^2 - 1)$.

Exercice 2 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire de solution générale homogène

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x}$$

L'application de la méthode de la variation de la constante amène à déterminer

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \, dx - \int \cos x \sin^2 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

Au final, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{\frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x + \lambda}{\cos x}$$

Exercice 3 : [énoncé]

a) $y(x) = (C + \sin^2 x)e^x$

b) $y(x) = (x^2 + C)e^{-x^2}$

c) $y(x) = C \cos x - 2 \cos^2 x$

Exercice 4 : [énoncé]

a) Solution de l'équation homogène sur \mathbb{R} : $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}(x+1)^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Solution particulière sur \mathbb{R} : $y_0(x) = -1$.

Solution générale sur \mathbb{R}

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}(x+1)^2} - 1 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

On aura $y(0) = 1$ si, et seulement si, $C = 2/\sqrt{e}$.

b) Solution de l'équation homogène sur \mathbb{R} : $y(x) = C\sqrt{x^2 + 1}e^{\arctan x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Solution particulière sur \mathbb{R} : $y_0(x) = x - 1$ après recherche de solution de la forme $ax + b$.

Solution générale sur \mathbb{R}

$$y(x) = C\sqrt{x^2 + 1}e^{\arctan x} + x - 1 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

On aura $y(0) = -1$ si, et seulement si, $C = 0$.

Exercice 5 : [énoncé]

a) C'est une équation différentielle linéaire. La solution générale homogène est

$$y(x) = \frac{\lambda}{1 - x}$$

b) Analyse :

Supposons y somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R' \geq 1$ solution sur $]0, 1[$ de l'équation (E). Pour $x \in]0, 1[$, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

et donc

$$(1-x)y'(x) + y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)(a_{n+1} - a_n)] x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{n+1}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k+1}$$

Synthèse :

Considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ déterminée par $a_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k+1}$$

Pour $|x| < 1$, on a

$$|a_n x^n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|b_k| |x|^n}{k+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| |x|^k$$

Or la série $\sum b_n x^n$ est absolument convergente (car $R \geq 1$) et donc la suite $(a_n x^n)$ est bornée.

On en déduit que le rayon de convergence R' de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R' \geq 1$ et les calculs qui précèdent assure que sa somme est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation étudiée.

Exercice 6 : [énoncé]

La solution générale de l'équation étudiée est

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} \text{ avec } A(t) = \int_0^t a(u) du$$

Or pour tout $t \geq 0$,

$$|A(t)| \leq \int_0^t |a(u)| du \leq \int_0^{+\infty} |a(u)| du$$

et donc la fonction y est bornée.

Exercice 7 : [énoncé]

a) La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = h$ est

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x h(t) e^t dt \right) e^{-x}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq A, |h(t)| \leq \varepsilon$$

On a alors

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^A h(t) e^t dt \right) e^{-x} + \int_A^x h(t) e^{t-x} dt$$

avec

$$\left| \int_A^x h(t) e^{t-x} dt \right| \leq \varepsilon \text{ et } \left(\lambda + \int_0^A h(t) e^t dt \right) e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

b) Posons $h = f' + f - \ell$. $f - \ell$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = h$ donc $f - \ell \xrightarrow{+\infty} 0$ puis $f \xrightarrow{+\infty} \ell$.

Exercice 8 : [énoncé]

Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction f est solution de l'équation différentielle.

$$y' + \alpha y = g$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$y(x) = \lambda e^{-\alpha x} + \int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt$$

Ainsi, on peut écrire

$$f(x) = \lambda e^{-\alpha x} + \int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt$$

Il est immédiat que $\lambda e^{-\alpha x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ car $\text{Re} \alpha > 0$.

Étudions maintenant la limite du terme intégral.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction g tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que

$$\forall t \geq A, |g(t)| \leq \varepsilon$$

On a alors pour tout $x \geq A$

$$\int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt = \int_0^A g(t) e^{\alpha(t-x)} dt + \int_A^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt$$

avec

$$\left| \int_A^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt \right| \leq \int_A^x \varepsilon e^{\text{Re}(\alpha)(t-x)} dt \leq \frac{\varepsilon}{\text{Re}(\alpha)} \left[e^{\text{Re}(\alpha)(t-x)} \right]_A^x \leq \frac{\varepsilon}{\text{Re}(\alpha)}$$

et

$$\left| \int_0^A g(t) e^{\alpha(t-x)} dt \right| = \left| \int_0^A g(t) e^{\alpha t} dt \right| e^{-\text{Re}(\alpha)x} = C t e^{-\text{Re}(\alpha)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Pour x assez grand on a alors

$$\left| \int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{\text{Re}(\alpha)} + \varepsilon$$

Ainsi $\int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ puis $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 9 : [énoncé]

a) Posons $z(t) = y(t + T)$. La fonction z est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) + \alpha z(t) = y'(t + T) + \alpha y(t + T) = \varphi(t + T) = \varphi(t)$$

La fonction z est donc solution de (E).

b) Si y est T -périodique, on a évidemment $y(0) = y(T)$.

Inversement, si $y(0) = y(T)$ alors y et z sont solutions d'un même problème de Cauchy posé en 0. Par unicité de ces solutions, on peut conclure $y = z$.

c) On peut exprimer la solution générale de l'équation (E)

$$y(t) = \left(\lambda + \int_0^t \varphi(u) e^{\alpha u} du \right) e^{-\alpha t}$$

L'équation $y(0) = y(T)$ équivaut alors l'équation

$$\lambda = \left(\lambda + \int_0^T \varphi(u) e^{\alpha u} du \right) e^{-\alpha T}$$

Si $e^{\alpha T} \neq 1$, cette équation précédente possède une unique solution en l'inconnue λ ce qui détermine y .

La condition $e^{\alpha T} = 1$ est uniquement vérifiée pour les valeurs

$$\alpha = \frac{2ik\pi}{T} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 10 : [énoncé]

Sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ ou $\mathbb{R}^{-\ast}$,

$$E \Leftrightarrow y' = \frac{1}{x^2} y$$

Solution générale : $y(x) = C e^{-1/x}$.

Soit y une solution sur \mathbb{R} .

y est solution sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et $\mathbb{R}^{-\ast}$ donc il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+ e^{-1/x} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^- e^{-1/x}$$

Continuité en 0

$$y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \begin{cases} \pm\infty \text{ si } C^- \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Nécessairement $y(0) = 0$ et $C^- = 0$.

Dérivabilité en 0

$$y'(x) = \frac{C^+}{x^2} e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \text{ donc } y'(0) = 0$$

Equation différentielle en 0 : $0^2 y'(0) - y(0) = 0$: ok.

Finalement

$$\exists C \in \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} C e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement une telle fonction est solution.

Exercice 11 : [énoncé]

Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ ou $\mathbb{R}^{-\ast}$

$$y(x) = \frac{C + x}{e^x - 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Soit y une fonction solution sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et $\mathbb{R}^{-\ast}$.

Il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, y(x) = \frac{C^+ + x}{e^x - 1} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \frac{C^- + x}{e^x - 1}$$

Pour que la fonction y puisse être prolongée par continuité en 0, il faut $C^+ = C^- = 0$ auquel cas

$$y(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ pour } x \neq 0$$

et la fonction se prolonge par $y(0) = 1$.

On vérifie que ce prolongement est de classe C^∞ car inverse d'une fonction développable en série entière.

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x - 1) y(x) = x$$

donne par dérivation, la vérification de l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

Finalement, il existe une seule solution sur \mathbb{R} :

$$y(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ prolongée par continuité avec } y(0) = 1$$

Exercice 12 : [énoncé]Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$

$$y(x) = C \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$$

Après recollement en 0, solution générale sur \mathbb{R}

$$y(x) = C \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 13 : [énoncé]Sur \mathbb{R}^+ , $E \Leftrightarrow y' + y = x$ de solution générale $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$.Sur \mathbb{R}^- , $E \Leftrightarrow y' + y = 0$ de solution générale $y(x) = Ce^{-x}$.Soit y solution de E sur \mathbb{R} .Comme y est solution sur \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 0, y(x) = C^+ e^{-x} + x - 1 \text{ et } \forall x \leq 0, y(x) = C^- e^{-x}$$

Définition en 0 : $y(0) = C^+ - 1 = C^-$ donc $C^+ = C^- + 1$.Dérivabilité en 0 : $y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -C^+ + 1$ et $y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -C^-$ donc $y'(0) = -C^+ + 1 = -C^-$.Equation différentielle en 0 : $-C^+ + 1 + C^+ - 1 = \max(0, 0)$: okFinalement, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ (C-1)e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement : ok

Exercice 14 : [énoncé]C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0, +\infty[$.Sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$,

$$\int \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} dx = 3 \ln x + \ln |\ln x| + C^{te}$$

Solution générale sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3 |\ln x|$$

Solution sur $]0, +\infty[$.Soient $y :]0, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0, 1[$ et $y(x) = \mu x^3 \ln x$ sur $]1, +\infty[$.La continuité en 1 donne $y(1) = 0$ sans conditions sur λ et μ .La dérivabilité en 1 donne $\lambda = \mu$.Ainsi $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0, +\infty[$ qui est évidemment solution.**Exercice 15 :** [énoncé]a) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = x \ln |x| + Cx \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Pas de recollement possible en 0.

b) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = 1 + \frac{C}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en 0, solution générale sur \mathbb{R} : $y(x) = 1$.c) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^4 + Cx^2 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en 0, solution générale sur \mathbb{R} :

$$y(x) = \begin{cases} C^+ x^2 + \frac{1}{4}x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ C^- x^2 + \frac{1}{4}x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ avec } C^+, C^- \in \mathbb{R}$$

d) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$:

$$y(x) = \frac{1}{x} + C \frac{x^2 + 1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Via

$$\frac{x^2 - 1}{x(1 + x^2)} = \frac{2x^2 - (1 + x^2)}{x(1 + x^2)} = \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{1}{x}$$

Après recollement en 0, solution générale sur \mathbb{R} : $y(x) = -x$.**Exercice 16 :** [énoncé]a) Solution générale sur $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \cos x + C \sin x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur \mathbb{R} :

$$y(x) = \cos x + C \sin x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

b) Solution générale sur $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = Ce^{1/\sin^2 x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur \mathbb{R} :

$$y(x) = \begin{cases} C_k e^{1/\sin^2 x} & \text{si } x \in I_k \\ 0 & \text{si } x = k\pi \end{cases} \text{ avec } (C_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$$

Exercice 17 : [énoncé]

a) Soit $I =]-\pi/2, \pi/2[$ le plus grand intervalle contenant où l'équation différentielle a un sens.

Posons $I^+ =]0, \pi/2[$ et $I^- =]-\pi/2, 0[$.

Solution générale sur I^+ : $y(x) = C^+ \sin x$.

Solution générale sur I^- : $y(x) = C^- \sin x$.

Cherchons les solutions définies sur I .

Analyse : Soit y une solution sur I , s'il en existe.

y est a fortiori solution sur I^+ et I^- donc :

$\exists C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = C^+ \sin x$ sur I^+ et $y(x) = C^- \sin x$ sur I^- .

Comme y doit être continue en 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = y(0) = 0$. Pas

d'informations sur C^+ ni C^- .

Comme y doit être dérivable en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = C^+ = y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = C^-.$$

Donc $C^+ = C^-$. Finalement $y(x) = C^+ \sin x$ sur I entier.

Synthèse : $y(x) = C \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$ est bien solution sur I .

On aura $y(0) = 0 \Leftrightarrow C \cdot \sin(0) = 0$ ce qui est toujours vraie.

Il y a ici une infinité de solutions au problème de Cauchy.

b) On aura $y(0) = 1 \Leftrightarrow C \cdot \sin(0) = 1$ ce qui est impossible.

Il n'y a ici aucune solution au problème de Cauchy.

Exercice 18 : [énoncé]

Soit $I =]-\infty, -1[,]-1, 0[,]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

Sur I , l'équation différentielle devient : $y' + \frac{2}{x(x^2-1)}y = \frac{x}{x^2-1}$.

La solution générale sur I est $\frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Après recollement en 1, 0 et -1 on conclut, pour tout intervalle I :

Si $1, 0, -1 \notin I, y(x) = \frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } 1, -1 \notin I \text{ et } 0 \in I, y(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \ln|x| + C^+ x^2}{x^2 - 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 \ln|x| + C^- x^2}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ avec } C^+, C^- \in \mathbb{R}.$$

Si $1 \in I$ ou $-1 \in I, y(x) = \frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1}$.

Exercice 19 : [énoncé]

Sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et $\mathbb{R}^{-\ast}$: $y(x) = C |x|^\alpha$.

Soit y une solution sur \mathbb{R} .

On a $y(x) = C^+ x^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et $y(x) = C^- |x|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{-\ast}$.

Si $\alpha < 0$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.

Si $\alpha = 0$, la limite en 0 donne $C^+ = C^-$ et on conclut que y est constante.

Inversement ok.

Si $\alpha > 0$, la limite en 0 donne $y(0) = 0$.

On a $y'(x) = \alpha C^+ x^{\alpha-1}$ sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et $y(x) = -\alpha C^- |x|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{-\ast}$.

Si $\alpha < 1$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.

Si $\alpha = 1$, la limite en 0 implique $C^+ = -C^-$ et on conclut que y est linéaire.

Inversement ok.

Si $\alpha > 1$, la limite en 0 existe et est nulle ce qui permet d'affirmer $y'(0) = 0$

L'équation différentielle est bien vérifiée en 0.

$$\text{Inversement, lorsque } \alpha > 1, \text{ la fonction définie par } y(x) = \begin{cases} C^+ x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C^- (-x)^\alpha & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ est}$$

solution.

Exercice 20 : [énoncé]

a) On résout l'équation différentielle linéaire étudiée et, par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale suivante

$$g(x) = \lambda x + x \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt$$

Par une intégration par parties, on peut écrire

$$g(x) = \lambda x - f(x) + x f(1) + x \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, on a

$$\left| x \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt \right| \leq \|f'\|_{\infty, [0,1]} x |\ln x|$$

et on obtient

$$g(x) \rightarrow -f(0)$$

Quand $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{x} (g(x) - g(0)) = \lambda - \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(1) + \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$$

Le terme $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ converge vers $f'(0)$.

Si $f'(0) \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{]0,1]} \frac{f'(t)}{t} dt$ diverge et donc le terme $\int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$ diverge. On en déduit qu'alors g n'est pas dérivable en 0.

L'égalité $f'(0) = 0$ est une condition nécessaire à la dérivabilité de g en 0. Cette condition n'est pas suffisante. En effet considérons une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_{]0,1]} \frac{f'(t)}{t} dt$ demeure divergente alors que $f'(0) = 0$.

b) Puisque f est de classe \mathcal{C}^2 et vérifie $f'(0) = 0$ on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x^2 \varphi(x) \text{ pour tout } x > 0$$

avec $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et convergeant vers $f''(0)/2$ en 0^+ .

On a alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \lambda x + x f(0) - f(0) + x \int_1^x \varphi(t) dt$$

g est de classe \mathcal{C}^3 sur $]0, +\infty[$ car φ est de classe \mathcal{C}^2 .

On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = -f(0)$

$$g'(x) = \lambda + f(0) + x \varphi(x) + \int_1^x \varphi(t) dt$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, g' converge et donc g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

$$g''(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x)$$

Or

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x^2} - 2 \frac{f(x) - f(0)}{x^3}$$

donc

$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f''(0)$$

On en déduit que g est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, +\infty[$

Exercice 21 : [énoncé]

a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Après résolution via variation de la constante, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{x + \lambda}{\ln x}$$

b) Par opérations, la fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[1/2, +\infty[$. Pour $x \in]-1, 1[$ on a le développement en série entière

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

et si $x \neq 0$, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

Si l'on pose $g(0) = 1$, la relation précédente reste valable pour $x = 0$ et ainsi on a prolongé g en une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Ce prolongement est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$ puis sur $] -1, +\infty[$.

c) La fonction g est à valeurs strictement positives et on peut donc introduire la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{g(x-1)}$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ et sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

Ainsi f est solution de (E) sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et enfin on vérifie aisément que l'équation différentielle (E) est aussi vérifiée quand $x = 1$.

Exercice 22 : [énoncé]

a) E est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} :

$$y(x) = C |x|^\alpha$$

Comme y est solution sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} , il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+ |x|^\alpha \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^- |x|^\alpha$$

b) Si $\alpha < 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^+ \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

y peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^- = 0$ et alors $y(0) = 0$.

La solution correspondante est la fonction nulle qui est solution de E .

Si $\alpha = 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} C^+ \text{ et } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} C^-$$

y peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^-$ et alors $y(0) = C^+$.

La solution correspondante est une fonction constante qui inversement est solution de E .

Si $\alpha > 0$ alors

$$y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$$

y peut être prolongée par continuité en 0 indépendamment de C^+ et C^- en posant $y(0) = 0$.

c) Si $\alpha \in]0, 1[$ alors

$$y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^+ \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En vertu du théorème du prolongement \mathcal{C}^1 , la fonction y est dérivable en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^- = 0$.

La solution correspondante est la fonction nulle qui est solution de E .

Si $\alpha = 1$ alors

$$y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} C^+ \text{ et } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -C^-$$

La fonction y est dérivable en 0 si, et seulement si, $C^+ = -C^-$.

La fonction correspondante est alors $x \mapsto C^+x$ sur \mathbb{R} qui est solution de E .

Si $\alpha > 1$ alors

$$y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$$

La fonction prolongée est dérivable en 0 indépendamment de C^+ et C^- .

Cette fonction est alors solution de E sur \mathbb{R} car dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant l'équation différentielle.

d) Si $\alpha < 0$ ou $0 < \alpha < 1$: seule la fonction nulle est seule solution sur \mathbb{R} .

Si $\alpha = 0$ alors les fonctions constantes sont les solutions de E sur \mathbb{R} .

Si $\alpha = 1$ alors les fonctions linéaires ($x \mapsto Cx$) sont les solutions de E sur \mathbb{R} .

Si $\alpha > 1$ alors les solutions de E sur \mathbb{R} sont les fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} C^+ |x|^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C^- |x|^\alpha & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $C^+, C^- \in \mathbb{R}$

Exercice 23 : [énoncé]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant sur I l'équation différentielle

$$xy'(x) = \lambda y(x)$$

on obtient que $x \mapsto x^\lambda$ est une fonction propre de l'application φ . Pour une telle fonction, on a

$$xy'(x) = \lambda y(x)$$

donc en dérivant

$$xy''(x) + y'(x) - \lambda y'(x) = 0$$

puis

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - \lambda^2 y(x) = 0$$

On en déduit que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{-\alpha}$ sont solutions sur I de l'équation différentielle E_α . Or cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène résolue en y'' , son ensemble solution est donc un plan vectoriel. Puisque les deux précédentes fonctions sont des solutions indépendantes, elles constituent une base de ce plan vectoriel.

La solution générale de E_α est donc

$$y(x) = \lambda x^\alpha + \mu x^{-\alpha} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 24 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :

$$y(t) = (\lambda t + \mu)e^{-2t}.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)te^{-2t} + \mu(t)e^{-2t}$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)te^{-2t} + \mu'(t)e^{-2t} = 0 \\ \lambda'(t)(1-2t)e^{-2t} - 2\mu'(t)e^{-2t} = \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \frac{-t}{1+t^2} \end{cases}$$

$\lambda(t) = \arctan t$ et $\mu(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2)$ conviennent.

Finalement la solution générale des l'équation étudiée est :

$$y(t) = t \arctan(t)e^{-2t} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)e^{-2t} + (\lambda t + \mu)e^{-2t}$$

Exercice 25 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :

$$y = \lambda \cos t + \mu \sin t.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0 \\ -\lambda'(t) \sin t + \mu'(t) \cos t = \tan t \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^2 t / \cos t \\ \mu'(t) = \sin t \end{cases},$$

$$\lambda(t) = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} dt = \sin t - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \text{ et } \mu(t) = -\cos t \text{ conviennent car}$$

$$\int \frac{1}{\cos t} dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t}.$$

Finalement la solution générale de l'équation étudiée est :

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cos t \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda \cos t + \mu \sin t \text{ sur } I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[.$$

Exercice 26 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :

$$y = \lambda \cos t + \mu \sin t.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0 \\ -\lambda'(t) \sin t + \mu'(t) \cos t = \tan^2 t \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^3 t / \cos^2 t \\ \mu'(t) = \sin^2 t / \cos t \end{cases},$$

$$\lambda(t) = -\frac{1}{\cos t} - \cos t \text{ et } \mu(t) = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t \text{ conviennent car}$$

$$\int \frac{1}{\cos t} dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t}.$$

Finalement la solution générale de l'équation étudiée est :

$$y(t) = -2 + \frac{1}{2} \sin t \ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda \cos t + \mu \sin t \text{ sur } I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[.$$

Exercice 27 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

Méthode de variation des constantes

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \cotan x \end{cases}$$

Après résolution et intégration

$$y(x) = -\frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + A \cos x + B \sin x$$

Exercice 28 : [énoncé]

a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :

$$y = \lambda \cos t + \mu \sin t.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0 \\ -\lambda'(t) \sin t + \mu'(t) \cos t = f(t) \end{cases},$$

$$\cos t \times (1) - \sin t \times (2) \text{ donne } \lambda'(t) = -f(t) \sin t.$$

$$\sin t \times (1) + \cos t \times (2) \text{ donne } \mu'(t) = f(t) \cos t.$$

$$\text{Choisissons } \lambda(t) = \int_0^t -f(u) \sin u \, du \text{ et } \mu(t) = \int_0^t f(u) \cos u \, du$$

ce qui donne la solution particulière :

$$y(t) = \int_0^t f(u) (\sin t \cos u - \sin u \cos t) \, du = \int_0^t f(u) \sin(t - u) \, du.$$

La solution générale de l'équation est

$$y(t) = \int_0^t f(u) \sin(t - u) \, du + \lambda \cos(t) + \mu \sin(t).$$

b) $y(0) = 0$ donne $\lambda = 0$.

Avec les notations précédentes :

$$y'(t) = -\lambda(t) \sin t + \mu(t) \cos t - \lambda \sin t + \mu \cos t$$

$$\text{donc } y'(0) = \mu(0) + \mu = \mu \text{ puis } \mu = 0.$$

$$\text{Finalement : } y(t) = \int_0^t f(u) \sin(t - u) \, du.$$

Exercice 29 : [énoncé]

a) La solution générale de l'équation homogène associée est

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$$

On peut avoir l'intuition de trouver une solution particulière de la forme

$$y(t) = \alpha \cos(nt) \text{ et, en effet on obtient,}$$

$$y(t) = \frac{-1}{n^2 - 1} \cos(nt)$$

solution particulière lorsque $n \neq 1$. La solution générale est alors

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t + \frac{1}{1 - n^2} \cos(nt)$$

Quand $n = 1$, on applique la méthode de variation des constantes. On obtient une solution particulière en résolvant

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0 \\ -\lambda'(t) \sin t + \mu'(t) \cos t = \cos(nt) \end{cases}$$

Par les formules de Cramer, on obtient

$$\lambda'(t) = -\sin t \cos t \text{ et } \mu'(t) = \cos^2(t)$$

Alors

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2} \sin^2 t \text{ et } \mu(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin(t) \cos(t)}{2}$$

conviennent et l'on obtient la solution particulière

$$y(t) = \frac{t}{2} \sin t$$

puis la solution générale

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t + \frac{1}{2} t \sin t$$

b) Soit

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{2} t \sin t + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1-n^2} \cos(nt)$$

Sans difficultés, on peut dériver deux fois sous le signe somme car il y a convergence normale de la série des dérivées secondes et convergences simples intermédiaires. On peut alors conclure que f est de classe \mathcal{C}^2 et solution de l'équation différentielle étudiée. La solution générale de celle-ci est alors

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t + f(t)$$

Exercice 30 : [énoncé]

Posons $g = f + f''$. f est évidemment solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g$$

Après application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de cette équation est

$$y(x) = a \cos x + b \sin x + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt$$

Pour une telle solution,

$$y(x+\pi) + y(x) = \int_x^{x+\pi} g(t) \sin(x+\pi-t) dt \geq 0$$

Ainsi f vérifie

$$f(x) + f(x+\pi) \geq 0$$

Exercice 31 : [énoncé]

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont de classe \mathcal{C}^∞ car f l'est. Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

Cette solution est 2π -périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt$$

i.e. $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille (\sin, \cos) ainsi que la 2π -périodicité de f , cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt = 0$$

Exercice 32 : [énoncé]

Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$ est bornée. Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = f(x) - f(0) \cos x - \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt$$

Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer f croissante et donc $f'(t) \geq 0$. Puisque $-1 \leq \cos(x-t) \leq 1$,

$$f(0) - f(x) \leq \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt \leq f(x) - f(0)$$

puis

$$f(0)(1 - \cos x) \leq \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \leq 2f(x) - f(0)(1 + \cos x)$$

La fonction f étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$.

Exercice 33 : [énoncé]

a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 à coefficients constants de solution homogène

$$y = A \cos x + B \sin x$$

La méthode de variation des constantes propose une solution particulière de la forme

$$y(x) = A(x) \cos x + B(x) \sin x$$

avec A et B fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = 1/x \end{cases}$$

En faisant $\cos(x) \times (1) - \sin(x) \times (2)$, on détermine $A'(x)$ et $B'(x)$ s'obtient de façon analogue

$$\begin{cases} A'(x) = -\sin x/x \\ B'(x) = \cos x/x \end{cases}$$

On peut alors proposer

$$A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ et } B(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

où les intégrales introduites ont le bon goût de converger...

La solution générale de l'équation différentielle est alors

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

b) Posons $u(x, t) = e^{-tx}/(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[$.

$x \mapsto u(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}^+ pour chaque $t \in [0, +\infty[$

$t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$ et

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$. Par domination f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, $x \mapsto u(x, t)$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^+ pour chaque $t \in [0, +\infty[$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}$$

La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

La dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t . Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment, f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

On vérifie alors

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

de sorte que f est solution sur \mathbb{R}^{+*} de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = A \cos x + B \sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

On observe

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

donc par encadrement $f \xrightarrow{+\infty} 0$ ce qui entraîne $A = B = 0$.

Ainsi

$$\forall x > 0, f(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

Séparément, on calcule $f(0)$

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

c) Par convergence de l'intégrale, quand $x \rightarrow 0^+$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

De plus

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt = C^{te} + \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt$$

avec

$$\left| \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$$

donc

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \rightarrow 0$$

Ainsi en passant à la limite en 0 l'expression précédente de $f(x)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 34 : [énoncé]

a) Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S .

La fonction S est solution sur $] -R, R[$ de l'équation différentielle

Sur $] -R, R[$,

$$S''(x) + 2xS'(x) + 2S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n)x^n$$

Par conséquent, S est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2} a_n$$

ce qui donne

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!} a_0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1) \dots 3} a_1 = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} a_1$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.

Une telle série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car $a_{2p} = O(1/p!)$ et $a_{2p+1} = O(4^p/p!)$.

De plus par les calculs ci-dessus elle est solution de l'équation différentielle proposée sur \mathbb{R} .

b) Les solutions paires sont obtenue pour $a_{2p+1} = 0$. Cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 e^{-x^2}$$

Exercice 35 : [énoncé]

Soit y la somme de la série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R supposé > 0 .

$$4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (4n^2-1)a_n) t^n \text{ donc}$$

y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{(n-1/2)(n+1/2)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

$$\text{donc } a_{2p} = \binom{1/2}{2p} a_0 \text{ et } a_{2p+1} = \binom{1/2}{2p+1} a_1.$$

Or personne, oh non personne, n'ignore que

$$\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} t^n \text{ et } \sqrt{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} t^n$$

avec un rayon de convergence égal à 1.

En prenant $a_0 = a_1 = 1$, on obtient la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$.

En prenant $a_0 = 1$ et $a_1 = -1$, on obtient $t \mapsto \sqrt{1-t}$.

Ces deux fonctions sont solutions de l'équation étudiée (car $R = 1$) et, étant indépendantes, elles constituent un système fondamental de solutions. La solution générale s'exprime

$$y(t) = \lambda \sqrt{1+t} + \mu \sqrt{1-t}$$

Exercice 36 : [énoncé]

a) Soit $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière solution de rayon de convergence $R > 0$.

Sur $] -R, R[$, la fonction y est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

de sorte que

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n) t^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation étudiée sur $] -R, R[$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -a_n$$

ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = (-1)^p a_0 \text{ et } a_{2p+1} = (-1)^p a_1$$

et on obtient

$$y(t) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p+1} = \frac{a_0 + a_1 t}{1 + t^2}$$

Puisque la série entière écrite est de rayon de convergence $R \geq 1$, on peut assurer que les fonctions proposées sont solutions sur $] -1, 1[$ à l'équation étudiée. Cela fournit un système fondamental de solutions sur $] -1, 1[$ qu'il suffit de réinjecter dans l'équation pour affirmer que ces fonctions forment aussi un système fondamental de solution sur \mathbb{R} .

Puisque l'espace des solutions de cette équation homogène est de dimension 2, on peut conclure que la solution générale est

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{1 + t^2}$$

b) La méthode de variation des constantes nous amène à rechercher une solution particulière

$$y(t) = \frac{\lambda(t) + \mu(t)t}{1 + t^2}$$

avec λ et μ fonctions dérivables solution du système

$$\begin{cases} \frac{\lambda'(t)}{1 + t^2} + \frac{\mu'(t)t}{1 + t^2} = 0 \\ -\frac{2t\lambda'(t)}{(1 + t^2)^2} + \frac{\mu'(t)(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} = \frac{1}{(1 + t^2)^2} \end{cases}$$

On obtient $\lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ puis

$$y(t) = \frac{t \arctan t - \ln \sqrt{1 + t^2}}{1 + t^2}$$

Cette solution particulière permet ensuite d'exprimer la solution générale.

Exercice 37 : [énoncé]

a) Par analyse synthèse, on obtient

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.

b) $h(0) = 1$ et par application du critère spécial des séries alternées à la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n$$

on obtient

$$-2 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n < -1$$

et donc $h(2) < 0$. On en déduit que h s'annule sur $]0, 2[$.

La fonction h est dérivable et

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!} x^{n-1}$$

On peut à nouveau appliquer le critère spécial des séries alternées à cette série pour tout $x \in]0, 2[$ et on en déduit $h'(x) < 0$.

Exercice 38 : [énoncé]

Par dérivation d'un déterminant

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \\ f_1(t) & f_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) \end{vmatrix}$$

donc

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) - b(t)f_1(t) & -a(t)f_2'(t) - b(t)f_2(t) \end{vmatrix}$$

puis

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) & -a(t)f_2'(t) \end{vmatrix} = -a(t) \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

Ainsi w est solution de l'équation différentielle

$$w' + a(t)w = 0$$

Exercice 39 : [énoncé]

a) Un simple calcul de vérification.

b) Le wronskien de deux solutions de l'équation homogène (E) est solution de l'équation différentielle

$$tw'(t) + (1 - 2t)w(t) = 0$$

Après résolution, on obtient

$$w(t) = \lambda \frac{e^{2t}}{t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Soit ψ une solution indépendante de φ (la théorie assure qu'il en existe) et w le wronskien de φ et ψ . Quitte à multiplier ψ par une constante ad hoc, on peut supposer

$$w(t) = \frac{e^{2t}}{t}$$

et la fonction ψ apparaît solution de l'équation différentielle

$$\varphi\psi' - \psi\varphi' = w(t)$$

c'est-à-dire

$$e^t\psi' - e^t\psi = w(t)$$

Après résolution, on obtient

$$\psi(t) = \ln(t)e^t$$

Le couple (φ, ψ) constituant un système fondamental de solutions, on peut exprimer la solution générale

$$y(t) = (\lambda \ln(t) + \mu)e^t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 40 : [énoncé]

a) f est continue, si f n'est pas de signe constant alors f s'annule.

b) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -q(x)f(x) \leq 0$$

c) L'équation est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

d) Considérons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$. g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Or f' est décroissante, on peut donc dresser le tableau de variation de g et puisque $g(a) = 0$, constater

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$$

e) Si $f'(a) \neq 0$ alors f étant en dessous de sa tangente prend des valeurs négatives, c'est impossible.

On en déduit que

$$\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = 0$$

donc f est constante et $f'' = 0$.

Pour que f vérifie l'équation

$$y'' + q(x)y = 0$$

(sachant $q \neq 0$) il est nécessaire que f soit constante égale à 0. C'est absurde.

Exercice 41 : [énoncé]

Par l'absurde :

S'il existe y une solution sur \mathbb{R} de $y'' + q(x)y = 0$ qui ne s'annule pas.

Deux cas sont possibles : y est positive ou y est négative.

Si y est positive alors $y'' \leq 0$.

La fonction y est donc concave et sa courbe représentative est en dessous de chacune de ses tangentes.

Si y possède une tangente de pente non nulle, y prend des valeurs négatives, exclu.

Par suite y est nécessairement constante et alors $y'' = 0$ puis $q(x)y(x) = 0$ implique que y est constante égale à 0. Absurde.

Si y est négative, le même raisonnement permet de conclure.

Exercice 42 : [énoncé]

Par l'absurde, si f admet une infinité de zéros, on peut construire une suite (x_n) formée de zéros de f deux à deux distincts. Puisque $[a, b]$ est compact, on peut extraire de cette suite (x_n) , une suite convergente que nous noterons encore (x_n) . Soit c la limite de (x_n) . Par continuité, on a $f(c) = 0$.

En appliquant le théorème de Rolle à f entre x_n et x_{n+1} , on détermine c_n compris entre x_n et x_{n+1} tel que $f'(c_n) = 0$. Par encadrement, $c_n \rightarrow c$ et par continuité $f'(c) = 0$.

Le problème de Cauchy linéaire formé par l'équation (E) et les conditions initiales

$$y(c) = 0 \text{ et } y'(c) = 0$$

possède une unique solution qui est la fonction nulle.

La fonction f est donc nulle : c'est absurde.

Exercice 43 : [énoncé]

Soit y une solution de l'équation étudiée possédant une infinité de racines.

Nous allons montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ vérifiant $y(a) = y'(a) = 0$.

Il est possible de former une suite (x_n) de racines deux à deux distinctes de la fonction y . Puisque la suite (x_n) est une suite d'éléments du compact $[0, 1]$, elle

possède une suite extraite convergente que nous noterons encore (x_n) . Ainsi on obtient une suite d'éléments deux à deux distincts de $[0, 1]$ vérifiant

$$x_n \rightarrow a \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, y(x_n) = 0$$

Par continuité de la fonction y , on obtient $y(a) = 0$.

Par application du théorème de Rolle entre x_n et x_{n+1} (qui sont distincts) il existe c_n compris entre x_n et x_{n+1} vérifiant $y'(c_n) = 0$. Par encadrement $c_n \rightarrow a$ et par continuité de y' , on obtient $y'(a) = 0$.

Finalement y apparaît comme solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(a) = y'(a) = 0 \end{cases}$$

Or la fonction nulle est aussi évidemment solution.

Par unicité de la solution sur $[0, 1]$ à ce problème de Cauchy, on peut conclure que y est la fonction nulle.

Exercice 44 : [\[énoncé\]](#)

a) Par l'absurde supposons que g possède un zéro non isolé a . Il existe alors une suite (x_n) de zéros de g distincts de a convergeant vers a . Puisque $g(x_n) = 0$, à la limite $g(a) = 0$. Puisque

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

on a aussi

$$g'(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} = 0$$

Ainsi $g(a) = g'(a) = 0$ et donc g est la fonction nulle car cette dernière est l'unique solution de l'équation linéaire d'ordre 2 E vérifiant les conditions initiales $y(a) = y'(a) = 0$.

b) Posons

$$\varphi(x) = (x_2 - x) \int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t) dt + (x - x_1) \int_x^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t) dt$$

La fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(x) = - \int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t) dt + \int_x^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t) dt$$

La fonction φ est donc deux fois dérivable et

$$\varphi''(x) = (x_1 - x_2)f(x)g(x)$$

Puisque g est solution de l'équation E , on obtient

$$\varphi''(x) = (x_2 - x_1)g''(x)$$

et donc

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x) + \alpha x + \beta$$

Or les fonctions φ et g s'annulent toutes deux en x_1 et x_2 donc $\alpha = \beta = 0$ puis

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x)$$

c) Soit $\alpha = \max_{[x_1, x_2]} |g| \neq 0$. Pour x tel que $|g(x)| = \alpha$, la relation précédente donne

$$\alpha(x_2 - x_1) \leq (x_2 - x) \left| \int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t) dt \right| + (x - x_1) \left| \int_x^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t) dt \right|$$

puis

$$\alpha(x_2 - x_1) \leq \alpha(x_2 - x)(x - x_1) \int_{x_1}^x |f(t)| dt + \alpha(x_2 - x)(x - x_1) \int_x^{x_2} |f(t)| dt = \alpha(x_2 - x)(x - x_1)$$

On en déduit

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \geq \frac{4}{x_2 - x_1}$$

car

$$(x_2 - x)(x - x_1) \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

Exercice 45 : [\[énoncé\]](#)

a) La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t) dt$$

Puisque la fonction q est intégrable sur $[0, +\infty[$ et puisque f est bornée, on peut affirmer que la fonction qf est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par suite l'intégrale de l'expression précédente de $f'(x)$ converge quand $x \rightarrow +\infty$. On en déduit que f' converge en $+\infty$.

Posons ℓ sa limite.

Si $\ell > 0$ alors il existe A assez grand tel que pour tout $x \geq A$ on a $f'(x) \geq \ell/2$.

On a alors

$$f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t) dt \geq f(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse f bornée.

De même, $\ell < 0$ est absurde et il reste donc $\ell = 0$.

b) En dérivant

$$w' = f''g + f'g' - f'g' - f''g = 0$$

car f et g sont solutions de (E) .

On en déduit que le wronskien w est constant et puisque les fonctions f et g sont bornées, leurs dérivées f' et g' convergent vers 0 en $+\infty$ et donc $w \xrightarrow{+\infty} 0$.

Ainsi le wronskien w est constant égal à 0 et donc les fonctions f et g sont liées.

On en déduit que l'équation différentielle E possède une solution non bornée.

Exercice 46 : [énoncé]

a) Si φ_1 possède une solution non isolée x_0 alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de φ_1 deux à deux distincts convergeant vers x_0 . En appliquant le théorème de Rolle entre les deux termes distincts x_n et x_{n+1} , on détermine une suite (c_n) convergeant vers x_0 formée de zéros de φ_1' . En passant la relation $\varphi_1'(c_n) = 0$ à la limite on obtient $\varphi_1'(x_0) = 0$. Ainsi φ_1 se comprend comme la solution du problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle $y'' + q_1(x) = 0$ et des conditions initiales $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Or ce problème de Cauchy possède une solution unique et celle-ci est la fonction nulle, cas que l'énoncé exclut.

b) On suppose les zéros de a et b consécutifs donc φ_1 est de signe constant sur $[a, b]$.

Quitte à considérer $-\varphi_1$ on peut supposer $\varphi_1 \geq 0$ sur $[a, b]$ et, sachant $\varphi_1'(a), \varphi_1'(b) \neq 0$ car φ_1 est non identiquement nulle, on a $\varphi_1'(a) > 0$ et $\varphi_1'(b) < 0$. Si φ_2 n'est pas de signe constant sur $[a, b]$ alors, par le théorème de valeurs intermédiaires, φ_2 s'annule sur $]a, b[$.

Si en revanche φ_2 est de signe constant sur $[a, b]$ alors, quitte à considérer $-\varphi_2$, on peut supposer $\varphi_2 \geq 0$ sur $[a, b]$ afin de fixer les idées. Considérons alors la fonction donnée par

$$w(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)$$

La fonction w est décroissante car

$$w'(t) = \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_2(t)\varphi_1''(t) = (q_1(t) - q_2(t))\varphi_1(t)\varphi_2(t) \leq 0$$

Or $w(a) = -\varphi_2(a)\varphi_1'(a) \leq 0$ et $w(b) = -\varphi_2(b)\varphi_1'(b) \geq 0$ donc nécessairement $\varphi_2(a) = \varphi_2(b) = 0$.

c) Il suffit d'appliquer ce qui précède à $q_1(x) = 1$ et $q_2(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}^+$ sachant que $\varphi_1(x) = \sin(x - a)$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$ et s'annule en a et $a + \pi$.

Exercice 47 : [énoncé]

L'équation E_0 est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.

a) y^2 est deux fois dérivable et

$$(y^2)''(x) = 2y(x)y''(x) + 2(y'(x))^2 = 2e^x(y(x))^2 + 2(y'(x))^2 \geq 0$$

Par suite la fonction y^2 est convexe.

Si $y(0) = y(1) = 0$ alors, sachant que y^2 est convexe, le graphe de y^2 est en dessous de chacune de ses cordes et donc y^2 est nulle sur $[0, 1]$. On en déduit que y est nulle sur $[0, 1]$ et en particulier $y(0) = y'(0) = 0$. Or la fonction nulle est la seule solution de l'équation différentielle E_0 vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. On en déduit que la fonction y est nulle sur \mathbb{R} .

b) Le wronskien en 0 des solutions y_1, y_2 est

$$w(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = y_2(0)$$

Si $y_2(0) = 0$ alors, sachant $y_2(1) = 0$, le résultat qui précède entraîne $y_2 = \tilde{0}$. Or $y_2'(1) = 1 \neq 0$. C'est impossible et donc $w(0) = y_2(0) \neq 0$.

On en déduit que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0 .

Notons que l'on démontre par le même argument que $y_1(1) \neq 0$.

c) Soit \tilde{y} une solution particulière de l'équation E .

La solution générale de E est de la forme $y(x) = \tilde{y}(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$.

Cette solution vérifie $y(0) = y(1) = 0$ si, et seulement si,

$$\tilde{y}(0) + \lambda_2 y_2(0) = 0 \text{ et } \tilde{y}(1) + \lambda_1 y_1(1) = 0$$

Ces deux équations déterminent λ_1 et λ_2 de façon unique puisque $y_1(1), y_2(0) \neq 0$.

Exercice 48 : [énoncé]

a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur \mathbb{R} . Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur \mathbb{R} .

b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées.

Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ . La fonction u est alors positive et u'' est négative sur \mathbb{R}^+ . La fonction u' étant donc décroissante sur \mathbb{R}^+ , on a

$$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta)$$

En intégrant

$$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x - \beta)$$

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$. On en déduit que u s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}^+ (et cette annulation est nécessairement sur \mathbb{R}^{+*})

De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}^{-*} (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)

c) Considérons l'ensemble

$$A = \{t > 0 / u(t) = 0\}$$

C'est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} , elle admet donc une borne inférieure δ .

Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que

$$t_n \rightarrow \delta$$

Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A .

De même on obtient γ .

d) Grâce à l'équation différentielle

$$W' = u''v - uv'' = 0$$

Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.

Or

$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta)$$

Puisque u est strictement positive sur $]\gamma, \delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit

$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$

ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma, \delta[$.

e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $]\gamma, \delta[$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $]\gamma, \delta[$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $]\gamma + n\pi, \delta + n\pi[$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.

Exercice 49 : [énoncé]

a) Par l'absurde, supposons que f s'annule et introduisons

$$b = \inf \{t \in [a, +\infty[/ f(t) = 0\}$$

Par continuité de f , on a $f(b) = 0$ et sachant $f(a) > 0$, on a aussi.

$$\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$$

On en déduit $f''(t) = q(t)f(t) \geq 0$ et donc f' est croissante sur $[a, b]$. Sachant $f'(a) > 0$, la fonction f est croissante sur $[a, b]$. Ceci est incompatible avec la valeur $f(b) = 0$. C'est absurde.

On en déduit que f ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$ et est donc strictement positive. Comme au dessus, on retrouve que f' est croissante et donc strictement positive.

Enfin

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \geq f(a) + f'(a)(x - a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

b) $(u'v - uv')' = u''v - uv'' = 0$. La fonction $u'v - uv'$ est donc constante égale à -1 (qui est sa valeur en a).

Puisque $v(a) = 0$ et $v'(a) = 1$, les fonctions v et v' sont strictement positives sur un intervalle de la forme $]a, a + h[$ (avec $h > 0$). En appliquant la question précédente avec $a + h$ plutôt que a , on assure que v et v' sont strictement positives sur $]a, +\infty[$. On peut donc introduire les fonctions u/v et u'/v' . Aussi

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2} \leq 0 \text{ et } \left(\frac{u'}{v'}\right)' = \frac{u''v' - u'v''}{v'^2} = \frac{q}{v'^2} \geq 0$$

On a

$$\frac{u}{v} - \frac{u'}{v'} = \frac{uv' - u'v}{vv'} = \frac{1}{vv'}$$

avec $v \xrightarrow{+\infty} +\infty$ et $v' \geq v'(a) = 1$. On en déduit que les fonctions u/v et u'/v' ont la même limite en $+\infty$ (ces limites existent assurément par monotonie). Aussi cette limite est finie car la fonction u/v est au dessus de la fonction u'/v' . Nous noterons ℓ cette limite.

c) Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$g = \lambda u + \mu v$$

car (u, v) forme un système fondamentale de solutions de l'équation linéaire (E) . La condition $g(a) = 1$ impose $\lambda = 1$.

Les conditions g strictement positive et décroissante imposent respectivement

$$u + \mu v > 0 \text{ et } u' + \mu v' \leq 0$$

La constante μ est alors nécessairement $-\ell$.

Finalement $g = u - \ell v$. La réciproque est immédiate.

d) Le changement de fonction proposé transpose l'équation $x^4 y''(x) = y(x)$ en $z''(1/x) = z(1/x)$.

La solution générale de l'équation (E) sur $[1, +\infty[$ est donc

$$y(x) = x \left(\lambda e^{1/x} + \mu e^{-1/x} \right)$$

Par développement limité

$$y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left((\lambda + \mu) + o(1) \right)$$

Pour que la fonction g décroisse en restant positive, il est nécessaire que $\lambda + \mu = 0$.

Sachant $y(1) = \lambda e + \mu/e$, on obtient

$$g(x) = \frac{ex}{e^2 - 1} \left(e^{1/x} - e^{-1/x} \right)$$

On aurait aussi pu calculer

$$u(x) = x e^{1/x-1} \text{ et } v(x) = \frac{x}{2} \left(-e^{1/x-1} + e^{-1/x+1} \right)$$

et reprendre ce qui précède.

Exercice 50 : [énoncé]

Supposons f solution.

$$f(x) = -1 - 2x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt$$

On a $f(0) = -1$ et f dérivable avec

$$f'(x) = -2 \int_0^x f(t) dt - 2x f(x) + x f(x)$$

Par suite $y : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$. Ceci détermine y et donc f de manière unique.

En recherchant les solutions développables en séries entières, on obtient $y(x) = -x e^{-x^2/2}$ puis

$$f(x) = (x^2 - 1) e^{-x^2/2}$$

Exercice 51 : [énoncé]

a) On peut écrire

$$f(x) = 1 - x - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt$$

Par opération sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 , f est de classe \mathcal{C}^1 .

b) Soit f solution. f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = -1 - \int_0^x f(t) dt$$

On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$f''(x) + f(x) = 0$$

Ainsi la fonction f est de la forme

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

De plus, on observe $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ ce qui détermine λ et μ :

$$\lambda = 1 \text{ et } \mu = -1$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto \cos x - \sin x$ est solution, soit en remontant les calculs (ce qui est possible) soit en refaisant ceux-ci.

Exercice 52 : [énoncé]

Si f est solution alors f est de classe \mathcal{C}^1 et on a :

$$f'(x) = x f(x) \text{ et } f(0) = 1$$

Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente, on obtient

$$f(x) = e^{x^2/2}$$

Inversement, $f(x) = e^{x^2/2}$ définit une solution du problème posé.

Exercice 53 : [énoncé]

Remarquons

$$\int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt + \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt$$

Si f est solution alors

$$f(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt$$

et donc $f(0) = 1$.

f est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = -2 \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt + 2 \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt + 2f(x)$$

et $f'(0) = 2$.

f est alors deux fois dérivable et

$$f''(x) = 1 - f(x) + 2f'(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 1$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^x + 1$$

Cela conduit à $f(x) = 2xe^x + 1$.

Inversement, soit par calculs, soit en remontant le raisonnement, on peut affirmer que la fonction proposée est solution.

Exercice 54 : [énoncé]

Soit f une solution du problème posé.

Posons $g(x) = f(x) + f(-x)$. La fonction g est une fonction paire, deux fois dérivable et solution de : $y'' + y = 0$. Par suite $g(x) = C \cos(x)$

Posons $h(x) = f(x) - f(-x)$. La fonction h est une fonction impaire, deux fois dérivable et solution de : $y'' - y = 2x$. Par suite $h(x) = D \operatorname{sh} x - 2x$.

On en déduit $f(x) = C \cos x + D \operatorname{sh} x - x$.

Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 55 : [énoncé]

Soit f une fonction solution. f est dérivable et

$$f'(x) = f(1/x)$$

donc f' est encore dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x) = -\frac{1}{x^2} f(x)$$

La fonction f apparaît alors comme étant solution sur \mathbb{R}^{+*} de l'équation différentielle

$$E : x^2 y'' + y = 0$$

E est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t = \ln x$.

Soient $y : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$z(t) = y(e^t)$$

z est deux fois dérivable et

$$y(x) = z(\ln x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)$$

y est solution sur \mathbb{R}^{+*} de E si, et seulement si, z est solution sur \mathbb{R} de

$$F : z'' - z' + z = 0$$

F est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale

$$z(x) = \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) e^{x/2}$$

La solution générale de E sur \mathbb{R}^{+*} est donc

$$y(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right)$$

Revenons à la fonction f . Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right)$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left((\lambda + \mu\sqrt{3}) \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + (\mu - \lambda\sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right)$$

et donc

$$f'(x) = f(1/x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda \\ \lambda\sqrt{3} - \mu = 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu\sqrt{3}$$

Finalement, les solutions sont les fonctions f données par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 56 : [énoncé]

Les éléments de E sont les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \alpha \cos(x) \text{ vérifiant } y(0) = \alpha$$

L'équation différentielle est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

La fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x \sin x$ est solution particulière et la solution générale est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{\alpha}{2}x \sin x$$

Les solutions vérifiant la condition $y(0) = \alpha$ sont les fonctions données par

$$y(x) = \alpha \left(\cos x + \frac{1}{2}x \sin x \right) + \mu \sin x$$

On en déduit que l'espace E est de dimension 2.

Exercice 57 : [énoncé]

Soit u une fonction solution.

Posons

$$U(x) = \int_0^x u(t) dt$$

La fonction U est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U'(x) = \lambda U(x) + f(x) \end{cases}$$

La résolution de l'équation différentielle linéaire $U' = \lambda U + f(x)$ donne par pour solution générale

$$U(x) = Ce^{-\lambda x} + \left(\int_0^x f(t)e^{\lambda t} dt \right) e^{-\lambda x}$$

La condition initiale $U(0) = 0$ détermine la constante C

$$C = 0$$

On en déduit la fonction u

$$u(x) = f(x) - \lambda \int_0^x f(t)e^{\lambda(t-x)} dt$$

Inversement, une telle fonction est solution car sa primitive s'annulant en 0 vérifie l'équation $U' = \lambda U + f(x)$.

Exercice 58 : [énoncé]

Soit f solution.

En prenant $x = 0$ dans la relation, on observe que f est nécessairement paire.

En dérivant la relation deux fois par rapport à x on obtient

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

En dérivant la relation deux fois par rapport à y on obtient

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

On en déduit

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$

Pour $y = 0$, on obtient l'équation $f''(x) = \lambda f(x)$ avec $\lambda = f''(0)$.

Si $\lambda > 0$ alors $f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x$.

Si $\lambda = 0$ alors $f(x) = 1$.

Si $\lambda < 0$ alors $f(x) = \cos\sqrt{-\lambda}x$

Inversement, on vérifie par le calcul qu'une fonction de la forme précédente est solution du problème posé.

Exercice 59 : [énoncé]

Sur $I =]-\infty, -1[$ ou $] -1, +\infty[$ l'espace des solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un plan vectoriel. En recherchant ses solutions polynomiales on obtient les fonctions $y(t) = a(t^2 - 1) + b(t + 1)$. Les deux fonctions polynomiales $t \mapsto t^2 - 1$ et $t \mapsto t + 1$ sont solutions et indépendantes, elles constituent un système fondamental de solution de l'équation sur I . Reste à recoller celles-ci en -1 .

Si y est solution sur \mathbb{R} , elle est a fortiori solution sur $] -\infty, -1[$ et $] -1, +\infty[$ donc il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t > -1, y(t) = a_1(t^2 - 1) + b_1(t + 1)$ et $\forall t < -1, y(t) = a_2(t^2 - 1) + b_2(t + 1)$.

Recherchons parmi les fonctions de la forme précédente celles pouvant être prolongée en une fonction deux fois dérivable en -1

Limite en -1 : $\lim_{t \rightarrow -1^+} y(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -1^-} y(t) = 0$. On peut prolonger y en -1 en posant $y(-1) = 0$.

$\forall t > -1, y'(t) = 2a_1t + b_1$ et $\forall t < -1, y'(t) = 2a_2t + b_2$.

Limite en -1 : $\lim_{t \rightarrow -1^+} y'(t) = -2a_1 + b_1$ et $\lim_{t \rightarrow -1^-} y'(t) = -2a_2 + b_2$. La fonction y est dérivable en -1 si, et seulement si, $-2a_1 + b_1 = -2a_2 + b_2$. Si tel est le cas : $\forall t > -1, y''(t) = 2a_1$ et $\forall t < -1, y''(t) = 2a_2$.

Limite en -1 : $\lim_{t \rightarrow -1^+} y''(t) = 2a_1$ et $\lim_{t \rightarrow -1^-} y''(t) = 2a_2$. La fonction y est deux fois dérivable en -1 si, et seulement si, $2a_1 = 2a_2$.

Au final y peut être prolongée en une fonction deux fois dérivable si, et seulement si, $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

La fonction y est alors donnée par $y(t) = a_1(t^2 - 1) + b_1(t + 1)$ sur \mathbb{R} et elle bien solution de l'équation.

Finalement les solutions sur \mathbb{R} de l'équation sont les fonctions

$$y(t) = a(t^2 - 1) + b(t + 1) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 60 : [énoncé]

On remarque

$$(t + 1)y'' - (t + 2)y' + y = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(y' - y)' - (y' - y) = 0$$

Les fonctions $y(t) = e^t$ et $y(t) = t + 2$ sont solutions sur \mathbb{R} .

Par suite, sur $I =]-\infty, -1[$ ou $] -1, +\infty[$, la solution générale est

$y(t) = \lambda e^t + \mu(t + 2)$ car on sait que l'espace des solutions est de dimension 2.

Après recollement en -1 , la solution générale sur \mathbb{R} est $y(t) = \lambda e^t + \mu(t + 2)$.

Exercice 61 : [énoncé]

a) $z : x \mapsto y(-x)$ est deux fois dérivable sur I' et vérifie bien l'équation.

b) Soient y une fonction deux fois dérivable définie sur \mathbb{R}^{+*} et z définie par $z(t) = y(\sqrt{t})$ de sorte que $y(x) = z(x^2)$. z est deux fois dérivable.

On a $y'(x) = 2xz'(x^2)$ et $y''(x) = 2z''(x^2) + 4x^2z'''(x^2)$.

y est solution sur \mathbb{R}^{+*} si, et seulement si,

$$4z'' - z = 0$$

Cela donne

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$$

c) Soit y une solution sur \mathbb{R} de l'équation proposée.

Puisque y est solution sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} on peut écrire :

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \lambda_2 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Puisque y est continue en 0

$$\lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2$$

y' est continue en 0 ne donne rien de plus

$$y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \lambda_1 - \mu_1 \text{ et } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \lambda_2 - \mu_2$$

Donc $y''(0) = \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2$ d'où $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$.

Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Inversement, une telle fonction est solution sur \mathbb{R} .

Exercice 62 : [énoncé]

a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Sur $] -R, R[$, la fonction $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ avec

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \text{ et } y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n-1}$$

On a alors

$$4xy'' + 2y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} (2(2n+1)(n+1)a_{n+1} - a_n)x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{(2n)!} a_0$$

Inversement, la série entière donnée par $\sum \frac{a_0}{(2n)!} x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$ et en vertu des calculs qui précèdent, sa somme est solution sur \mathbb{R} de l'équation (E).

b) Considérons $I = \mathbb{R}^{+*}$ ou \mathbb{R}^{-*} et posons $x = \varepsilon t^2$ avec $\varepsilon = \pm 1$.
Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\varepsilon t^2)$.

La fonction z est deux fois dérivable et

$$z(t) = y(\varepsilon t^2), z'(t) = 2\varepsilon t y'(\varepsilon t^2) \text{ et } z''(t) = 4t^2 y''(\varepsilon t^2) + 2\varepsilon y'(\varepsilon t^2)$$

de sorte que

$$z''(t) - z(t) = 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x)$$

Ainsi y est solution de (E) sur I si, et seulement si, z est solution sur \mathbb{R}^{+*} de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $z'' - z = 0$. La solution générale de cette dernière est $z(t) = \lambda \text{cht} + \mu \text{sht}$ et la solution générale de (E) sur I est donc

$$y(x) = \lambda \text{ch}(\sqrt{|x|}) + \mu \text{sh}(\sqrt{|x|})$$

c) Soit y une solution de (E) sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} . On peut écrire

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda \text{ch}(\sqrt{|x|}) + \mu \text{sh}(\sqrt{|x|}) \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \lambda' \text{ch}(\sqrt{|x|}) + \mu' \text{sh}(\sqrt{|x|})$$

Le raccord par continuité exige $\lambda = \lambda'$.

La dérivabilité du raccord exige $\mu = \mu' = 0$.

La fonction ainsi obtenue correspond alors au développement en série entière initiale qu'on sait être solution sur \mathbb{R} .

Exercice 63 : [énoncé]

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z = y' - y$.
 z est dérivable et $z' = y'' - y'$.

y est solution de E si, et seulement si, z est solution de $F : xz' - z = 1$.

F est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Solution générale de F sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} : $z(x) = Cx - 1$.

Après recollement, solution générale de F sur \mathbb{R} : $z(x) = Cx - 1$.

Reste à résoudre $G : y' - y = Cx - 1$.

Solution homogène : $y_0(x) = De^x$.

Solution particulière $y_1(x) = -C(x + 1) + 1$.

Solution générale de $E : y(x) = -C(x + 1) + De^x + 1$ avec $C, D \in \mathbb{R}$.

Exercice 64 : [énoncé]

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z = y'$, z est dérivable.

y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, z solution de

$$(1 + x^2)z' + 2xz = 0$$

On obtient

$$z(x) = \frac{C}{1 + x^2}$$

puis

$$y(x) = C \arctan x + D$$

Exercice 65 : [énoncé]

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(x) = (1 + e^x)y(x)$.

z est deux fois dérivable et $z'(x) = (1 + e^x)y'(x) + e^xy(x)$,

$z''(x) = (1 + e^x)y''(x) + 2e^xy'(x) + e^xy(x)$

y est solution de E si, et seulement si, z est solution de $F : z'' + z = xe^x$.

F est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants de solution homogène $z_0(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ et de solution particulière :

$$z_1(x) = \frac{x-1}{2}e^x.$$

Solution générale de $F : z(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x-1}{2}e^x$.

La solution générale de E est donc : $y(x) = \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x-1}{2}e^x}{1+e^x}$.

Exercice 66 : [énoncé]

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$z(x) = \frac{y(x)}{1 + e^x}$$

La fonction z est deux fois dérivable.

On a $y(x) = (1 + e^x)z(x)$, $y'(x) = (1 + e^x)z'(x) + e^xz(x)$,

$y''(x) = (1 + e^x)z''(x) + 2e^xz'(x) + e^xz(x)$.

y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si, $z'' - z = 0$.

On obtient pour solution générale de l'équation $z'' - z = 0$

$$z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

et on en déduit la solution générale de l'équation étudiée

$$y(x) = (C_1 e^x + C_2 e^{-x})(1 + e^x)$$

Exercice 67 : [énoncé]

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z : x \mapsto e^{x^2}y(x)$, z est deux fois dérivable.

y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, z solution de $z'' + z = 0$.

On obtient

$$z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

et on en déduit

$$y(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x^2}$$

Exercice 68 : [énoncé]

Soit $y : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

Posons $z : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(x) = x^2 y(x)$. z est deux fois dérivable.

$$z'(x) = x^2 y'(x) + 2xy(x), \quad z''(x) = x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x).$$

On observe $x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0 \Leftrightarrow z'' - z = 0$

La solution générale de l'équation $z'' = z$ est $z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

La solution générale de l'équation initiale est donc $y(x) = \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2}$.

Exercice 69 : [énoncé]

Soit $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$z(x) = x^{-\alpha} y(x)$$

La fonction z est deux fois dérivable et

$$y'(x) = x^\alpha z'(x) + \alpha x^{\alpha-1} z(x), \quad y''(x) = x^\alpha z''(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} z'(x) + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} z(x)$$

donc

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = x^{\alpha+1} z''(x) + 2(\alpha+1)x^\alpha z'(x) + (\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1} - x^{\alpha+1}) z(x)$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = z''(x) - z(x)$$

et donc y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$z(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$$

ce qui donne la solution générale

$$y(x) = \frac{\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x}{x}$$

Exercice 70 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Posons z la fonction définie par $z = y + y'$.

y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de $(1 + e^x)z' - e^x z = 0$ i.e. $z(x) = C(e^x + 1)$. On en déduit

$$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta(e^x + 2).$$

Exercice 71 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $]0, +\infty[$ et z la fonction définie par $z(x) = xy'(x) + y(x)$. z est dérivable. y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de

$$x.z' - 2z = -\frac{3}{x}$$

Après résolution de cette équation différentielle :

$$z(x) = Cx^2 + \frac{1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Par suite

$$xy'(x) + y(x) = Cx^2 + 1/x$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$y(x) = \frac{C'}{x} + \frac{1}{3}Cx^2 + \frac{\ln x}{x} \text{ avec } C, C' \in \mathbb{R}$$

Inversement les fonctions proposées sont bien solutions.

Exercice 72 : [énoncé]

a) L'équation homogène associée est

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = 0$$

La fonction $\varphi(t) = t^2 + 1$ en est solution sur \mathbb{R} .

b) Procédons au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

On obtient

$$(t^2 + 1)z''(t) + 4tz'(t) = 0$$

qui donne

$$z'(t) = \frac{\lambda}{(t^2 + 1)^2}$$

Sachant

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1}$$

on obtient

$$z(t) = \frac{\lambda}{2} \left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1} \right) + \mu$$

ce qui donne la solution homogène

$$y(t) = \frac{\lambda}{2} ((t^2+1) \arctan t + t) + \mu(t^2+1) + \frac{t}{4}(t^2+1)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) $y(t) = -t/2$ est solution particulière donc la solution générale est

$$y(t) = \lambda(t^2+1) + \mu((t^2+1) \arctan t + t) - \frac{1}{2}t$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 73 : [énoncé]

a) Si y est un polynôme unitaire de degré n solution de l'équation homogène, le coefficient de t^{n+2} dans le premier membre de l'équation est

$$n(n-1) - 2n + 2 = n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$$

et donc nécessairement $n \leq 2$.

Pour $\varphi(t) = at^2 + bt + c$, le premier membre de l'équation devient :

$$2a(1+t^2)^2 - 2t(2at+b)(1+t^2) + 2(t^2-1)(at^2+bt+c) = (2c-2a)t^2 - 4bt + (2a-2c)$$

d'où $a = c$ et $b = 0$

Finalement $\varphi(t) = t^2 + 1$ est solution particulière.

b) Par le changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$, on parvient à l'équation

$$(1+t^2)^3 z''(t) + 2t(1+t^2)^2 z'(t) = (1+t^2)$$

Après résolution de cette équation d'ordre 1 en l'inconnue z' , on obtient

$$z'(t) = \frac{\lambda + \arctan t}{(1+t^2)}$$

puis

$$z(t) = \mu + \lambda \arctan t + \frac{1}{2} (\arctan t)^2$$

Finalement la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(t) = \lambda(1+t^2) \arctan t + \mu(1+t^2) + \frac{1}{2}(1+t^2) (\arctan t)^2$$

Exercice 74 : [énoncé]

a) $\varphi(t) = t$ est évidemment solution particulière.

b) On pose le $y(t) = tz(t)$ et on parvient à l'équation

$$t^4 z'' + t^2(2t+1)z' = 0$$

On résout cette équation en la fonction inconnue z' puis on intègre pour obtenir

$$z(t) = \lambda e^{1/t} + \mu$$

Finalement la solution générale est

$$y(t) = \lambda t e^{1/t} + \mu t$$

Exercice 75 : [énoncé]

a) $\varphi(t) = t$ est solution remarquable.

b) En posant $y(t) = tz(t)$ et on parvient à l'équation

$$t^3 z'' + 3t^2 z' = 1$$

On résout cette équation en la fonction inconnue z'

$$z'(t) = \frac{\lambda}{t^3} + \frac{1}{t^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

et l'on obtient

$$z(t) = \frac{\lambda'}{t^2} + \mu - \frac{1}{t} \text{ avec } \lambda', \mu \in \mathbb{R}$$

Finalement, la solution générale est

$$y(t) = \frac{\lambda}{t} + \mu t - 1 \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 76 : [énoncé]

a) Soit y la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R supposé > 0 .

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 (a_{n+1} - a_n) x^n$$

On en déduit $y(x) = \frac{1}{1-x}$ solution de l'équation étudiée.

b) On pose $y(x) = \frac{z(x)}{1-x}$ avec z deux fois dérivable et l'on obtient

$$xz'' + z' = 0$$

On résout cette équation en la fonction inconnue z'

$$z'(x) = \frac{\lambda}{x}$$

puis on intègre

$$z(x) = \lambda \ln x + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Finalement, la solution générale sur $]0, 1[$ est

$$y(x) = \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{1 - x}$$

Exercice 77 : [énoncé]

a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y_1 sur $] -R, R[$.

Pour tout $x \in] -R, R[$, on a

$$xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = 3a_1 + 8a_2x + 21a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} ((n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3})x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on peut affirmer que y est solution de E sur $] -R, R[$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ \forall n \geq 3, a_{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+3)} a_{n-3} \end{cases}$$

Posons $a_0 = 1$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{4p} = \frac{1}{2p(2p+1)} a_{4(p-1)}$, les autres a_n nuls.

Ainsi

$$a_{4p} = \frac{1}{(2p+1)!}, a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0$$

La série entière correspondante est de rayon de convergence $R = +\infty$ et sa somme

$$\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}$$

est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle E en vertu des calculs qui précèdent.

Pour $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{\text{sh}(x^2)}{x^2}$$

b) On pose $y(x) = \varphi(x)z(x)$ et l'équation (E) devient

$$z''(x) = \left(\frac{1}{x} - 4x \frac{\text{ch}(x^2)}{\text{sh}(x^2)} \right) z'(x)$$

Après résolution en la fonction inconnue z' on obtient

$$z'(x) = \frac{\lambda x}{\text{sh}^2(x^2)}$$

puis

$$z(x) = -\frac{\lambda \text{ch}(x^2)}{2 \text{sh}(x^2)} + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

La solution générale de l'équation est alors

$$y(x) = \frac{\lambda \text{sh}(x^2) + \mu \text{ch}(x^2)}{x^2} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 78 : [énoncé]

a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y sur $] -R, R[$

Pour tout $x \in] -R, R[$, on a

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)x^n$$

La fonction y est donc solution de l'équation différentielle étudiée si, et seulement si,

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n$$

Inversement, en considérant la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x}{1-x}$, on obtient une fonction développable en série entière avec un rayon de convergence $R = 1$ et les calculs qui précèdent assure que y est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation étudiée.

b) On pose

$$y(x) = \frac{xz(x)}{1-x}$$

Après calculs, la fonction y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$xz''(x) + z'(x) = 0$$

Après résolution de cette équation en l'inconnue z' , on obtient

$$z'(x) = \frac{\lambda}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

puis en intégrant

$$z(x) = \lambda \ln x + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = \frac{(\lambda \ln x + \mu)x}{1 - x}$$

Exercice 79 : [énoncé]

Soit $y : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

Posons $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(e^t)$. z est deux fois dérivable.

$$y(x) = z(\ln x), y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x) \text{ et } y''(x) = \frac{1}{x^2}z''(\ln x) - \frac{1}{x^2}z'(\ln x).$$

Par suite $x^2y'' + xy' + y = 0 \Leftrightarrow z'' + z = 0$.

Solution générale : $y(x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$.

Exercice 80 : [énoncé]

a) Les solutions sur \mathbb{R}^{+*} sont :

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x + \frac{x^2}{3}$$

b) Les solutions sur \mathbb{R}^{+*} sont :

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x^2 - \frac{x}{2}$$

Exercice 81 : [énoncé]

$x = \cos t, t = \arccos x, x \in]-1, 1[, t \in]0, \pi[$.

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $]-1, 1[$.

Posons z la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $z(t) = y(x) = y(\cos t)$.

z est deux fois dérivable.

Après calculs :

y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle $z'' + 4z = t$ i.e.

$$z(t) = \lambda \cos 2t + \mu \sin 2t + \frac{1}{4}t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On en déduit

$$y(x) = \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{4} \arccos x \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 82 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur \mathbb{R} .

Posons z la fonction définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par $z(t) = y(x) = y(\tan t)$.

z est deux fois dérivable.

Après calculs :

y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation $z'' - 2z' + z = 0$ i.e. $z(t) = (\lambda t + \mu)e^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On en déduit $y(x) = (\lambda \arctan x + \mu)e^{\arctan x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 83 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $z : I =]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\tan t)$.

z est deux fois dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(\arctan x)$$

$$y'(x) = \frac{z'(\arctan x)}{1 + x^2} \text{ et } y''(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}z'(\arctan x) + \frac{1}{(1 + x^2)^2}z''(\arctan x)$$

y est solution si, et seulement si, z est solution sur I de l'équation $z'' + z = 0$.

On obtient

$$z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$$

et

$$y(x) = \frac{\lambda + \mu x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Exercice 84 : [énoncé]

Soient y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $z : I =]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(\tan x)$.

z est deux fois dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z(\arctan t)$.

$$y'(t) = \frac{z'(\arctan t)}{1+t^2} \text{ et } y''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}z'(\arctan t) + \frac{1}{(1+t^2)^2}z''(\arctan t).$$

y est solution si, et seulement si,

$$z''(\arctan t) + z(\arctan t) = t$$

soit $z''(x) + z(x) = \tan x$ sur I .

$z'' + z = 0$ donc $z = \lambda \cos x + \mu \sin x$.

Méthode de la variation des constantes : $\lambda'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ et $\mu'(x) = \sin x$.

$$\int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du = u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + C$$

Prenons $\lambda(x) = \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ et $\mu(x) = -\cos x$.

On obtient : $z(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cos x$ solution particulière.

Finalement

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \ln \frac{\sqrt{1+t^2} - t}{\sqrt{1+t^2} + t}$$

Exercice 85 : [énoncé]

Soient $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un \mathcal{C}^2 difféomorphisme.

Posons $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie de sorte que $y(u) = x(t)$ i.e. $y(u) = x(\varphi^{-1}(u))$.

La fonction y est deux fois dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = y(\varphi(t))$.

On a alors $x'(t) = \varphi'(t)y'(\varphi(t))$ et $x''(t) = (\varphi'(t))^2 y''(\varphi(t)) + \varphi''(t)y'(\varphi(t))$.

Par suite

$$(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = (1+t^2)\varphi'(t)^2 y''(\varphi(t)) + ((1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t)) y'(\varphi(t)) + a^2y(\varphi(t))$$

Pour $\varphi(t) = \operatorname{argsht}$, $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $(1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0$ de sorte que

$$(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = 0 \Leftrightarrow y''(\varphi(t)) + a^2y(\varphi(t)) = 0$$

Cela nous amène à résoudre l'équation

$$y''(u) + a^2y(u) = 0$$

Si $a \neq 0$, la solution générale de $y''(u) + a^2y(u) = 0$ est

$y(u) = \lambda \cos(au) + \mu \sin(au)$ et la solution générale de $(1+t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$ est

$$x(t) = \lambda \cos(a \operatorname{argsht}) + \mu \sin(a \operatorname{argsht}) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Si $a = 0$, on parvient à

$$x(t) = \lambda + \mu \operatorname{argsht} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 86 : [énoncé]

$P = (x+1)X - 1$ convient.

$$(E) \Leftrightarrow (x+1)z' - z = (3x+2)e^{3x}$$

Après résolution avec recollement la solution générale de cette dernière équation est $z(x) = \lambda(x+1) + e^{3x}$.

$$(E) \Leftrightarrow y' - 3y = \lambda(x+1) + e^{3x}$$

La solution générale est

$$y(x) = \lambda'(3x+4) + \mu e^{3x} + x e^{3x}$$

Exercice 87 : [énoncé]

$\varphi : t \mapsto \exp(ta) \circ \exp(tb)x_0$ est dérivable et vérifie $\varphi'(t) = (a+b)\varphi(t)$. En effet

$$(\exp(ta) \circ \exp(tb))' = a \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) + \exp(ta) \circ b \circ \exp(tb)$$

or $b \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ b$ car a et b commutent donc

$$(\exp(ta) \circ \exp(tb))' = (a+b) \circ \exp(ta) \circ \exp(tb)$$

De plus $\varphi(0) = x_0$ donc $\varphi(t) = \exp(t(a+b))x_0$. Puisque ceci vaut pour tout x_0 :

$$\exp(t(a+b)) = \exp(ta) \circ \exp(tb)$$

et pour $t = 1$ la relation demandée.

Exercice 88 : [énoncé]

Soit Y une solution du système différentiel $Y' = AY$.

La norme de Y s'obtient en calculant tYY .

On a

$$({}^tYY)' = {}^tY'Y + {}^tYY' = {}^tY({}^tA + A)Y$$

Ainsi si A est antisymétrique, $({}^tYY)' = 0$ et donc Y est de norme constante.

Inversement, si chaque solution du système différentiel est de norme constante alors pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$,

$${}^tY_0({}^tA + A)Y_0 = 0$$

Par suite 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme symétrique ${}^tA + A$ et, puisque celui-ci est diagonalisable, on obtient

$${}^tA + A = 0$$

La matrice A est donc antisymétrique.

Exercice 89 : [énoncé]

L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant. Sa solution générale peut être exprimée par une exponentielle

$$X(t) = \exp(tA)X(0)$$

avec

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Or $A^2 = -I_{2n}$ donc, en séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs de cette série absolument convergente

$$\exp(tA) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} t^{2p} I_{2n} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} A = \cos(t)I_{2n} + \sin(t)A$$

Ainsi la solution générale de l'équation étudiée est

$$X(t) = \cos(t)X(0) + \sin(t)AX(0)$$

Exercice 90 : [énoncé]

a) La matrice complexe A est assurément trigonalisable et on peut donc écrire $A = TPT^{-1}$ avec

$$P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_k \in \text{Sp}A$$

On a alors

$$P^{-1}(e^A - I_n)P = e^T - I_n = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} - 1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} - 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall 1 \leq k \leq n, e^{\lambda_k} - 1 \neq 0 \text{ car } \lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}$$

On peut donc conclure $e^A - I_n \in GL_n(\mathbb{C})$.

b) La solution générale de l'équation (E) est de la forme

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \tilde{X}(t)$$

avec \tilde{X} solution particulière et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ colonne quelconque.

Analyse :

Soit X une solution 1-périodique. On a $X(1) = X(0)$ et donc après résolution

$$X_0 = (e^A - I_n)^{-1}(\tilde{X}(0) - \tilde{X}(1))$$

ce qui détermine entièrement la solution X .

Synthèse :

Considérons la fonction définie comme au terme de l'analyse ci-dessus. Elle est solution de l'équation (E) et vérifie $X(1) = X(0)$.

Considérons alors la fonction donnée par $Y(t) = X(t+1)$.

On vérifie que Y est encore solution de (E) (car la fonction B est périodique) et puisque $Y(0) = X(1) = X(0)$, les fonctions X et Y sont égales car solutions d'un même problème de Cauchy.

Finalement, la fonction X est périodique.

Exercice 91 : [énoncé]

a) Supposons

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \dots + \lambda_{p-1} N^{p-1} = O_n$$

En multipliant par N^{p-1} on obtient $\lambda_0 N^{p-1} = O_n$ car $N^p = O_n$. Or $N^{p-1} \neq O_n$ donc $\lambda_0 = 0$.

On montre de même successivement que $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{p-1} = 0$.

On conclut que la famille $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est libre.

Puisque λI_n et N commutent, on a

$$e^{t(\lambda I_n + N)} = e^{t\lambda I_n} e^{tN} = e^{\lambda t} \left(I_n + \frac{t}{1!} N + \frac{t^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} N^{p-1} \right)$$

b) Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et possède une unique racine λ , on a donc

$$\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$$

En vertu du théorème de Cayley Hamilton

$$N^n = (A - \lambda I_n)^n = O_n$$

La matrice N s'avère donc nilpotente.

Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \mapsto X(t) = e^{tA}X(0) = e^{\lambda t} \cdot e^{tN}X(0)$$

Si N est nulle et $\lambda \in i\mathbb{R}$, il est clair que toutes les solutions sont bornées.

Inversement, supposons les solutions toutes bornées. En choisissant

$X(0) \in \ker N \setminus \{O_n\}$, la solution

$$t \mapsto e^{tA}X(0) = e^{\lambda t}X(0)$$

est bornée sur \mathbb{R} et nécessairement $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Notons p l'indice de nilpotence de N et choisissons $X(0) \notin \ker N^{p-1}$. La solution

$$t \mapsto e^{\lambda t} \cdot e^{tN}X(0)$$

devant être bornée avec $|e^{\lambda t}| = 1$, la fonction

$$t \mapsto X(0) + tNX(0) + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} N^{p-1}X(0)$$

est elle aussi bornée. Or $N^{p-1}X(0) \neq 0$ et donc cette solution ne peut pas être bornée si $p - 1 > 0$.

On en déduit $p = 1$ puis $N = O_n$.

c) Les polynômes $(X - \lambda_k)^{n_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Par le théorème de Cayley Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on obtient

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^m \ker(f - \lambda_k \text{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

Une base adaptée à cette décomposition fournit une représentation matricielle Δ de f diagonale par blocs. Plus précisément, les blocs diagonaux sont de la forme

$$\lambda_k \text{Id}_{n_k} + N_k \text{ avec } N_k^{n_k} = O_{n_k}$$

d) La matrice A est semblable à Δ et on peut donc écrire

$$A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible}$$

Les solutions de l'équation $X' = AX$ correspondent aux solutions de l'équation $Y' = \Delta Y$ via $Y = P^{-1}X$.

Les solutions de $X' = AX$ seront bornées si, et seulement si, celles de $Y' = \Delta Y$ le sont. En raisonnant par blocs et en exploitant le résultat du b), on peut affirmer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur \mathbb{R} si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et les N_k tous nuls (ce qui revient à dire que A est diagonalisable).

e) Supposons A antisymétrique réelle. Puisque A et ${}^t A$ commutent

$$\overline{{}^t(e^{tA})}e^{tA} = e^{tA+tA} = e^{O_n} = I_n$$

Soit $X : t \mapsto e^{tA}.X(0)$ une solution de l'équation $X' = AX$. On a

$$\|X(t)\|^2 = \overline{{}^t X(t)}X(t) = \overline{{}^t X(0)}\overline{{}^t(e^{tA})}e^{tA}X(0) = \|X(0)\|^2$$

Les solutions sont toutes bornées et donc A est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.

Exercice 92 : [énoncé]

Soit (x, y) solution sur \mathbb{R} .

On pose $z = x + iy$, on a $z'(t) = e^{-it}z(t)$ donc $z(t) = Ce^{ie^{-it}} = Ce^{i \cos t + \sin t}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

En écrivant $C = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ on peut conclure

$$x(t) = e^{\sin(t)}(A \cos(\cos(t)) - B \sin(\cos(t)))$$

et

$$y(t) = e^{\sin(t)}(B \cos(\cos(t)) + A \sin(\cos(t)))$$

Vérification : il suffit de remonter les calculs.

Exercice 93 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur \mathbb{R} d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A(t)} = X^2 - (t+1)X + t.$$

$$\text{Sp}(A(t)) = \{1, t\}.$$

Si $t \neq 1$,

$$E_1(A(t)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_t(A(t)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ indépendant de t , $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$

et cette relation est aussi vraie pour $t = 1$.

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = D(t)Y$$

En écrivant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

on a

$$Y' = D(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = ty_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda e^t \\ y_2(t) = \mu e^{t^2/2} \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 2e^{t^2/2} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 94 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur \mathbb{R} d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\chi_{A(t)} = X^2 - 2tX + (t^2 - 1), \text{Sp}(A) = \{t + 1, t - 1\}.$$

$$E_{t+1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{t-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ indépendante de t , $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec

$$D(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, $X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = D(t)Y$.

$$\text{En écrivant } Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

$$Y' = D(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = (t+1)y_1 \\ y_2' = (t-1)y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda e^{(t^2+2t)/2} \\ y_2 = \mu e^{(t^2-2t)/2} \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^{(t^2+2t)/2} \\ -e^{(t^2+2t)/2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{(t^2-2t)/2} \\ -2e^{(t^2-2t)/2} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 95 : [\[énoncé\]](#)

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 défini sur \mathbb{R} d'équation matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Commençons par résoudre l'équation homogène $X' = A(t)X$.

$$\chi_{A(t)} = (X - 1)^2.$$

$$E_1(A(t)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ indépendante de t , $A(t) = PT(t)P^{-1}$ avec

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = T(t)Y$$

$$\text{En écrivant } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Y' = T(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + ty_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \mu e^t + \frac{\lambda}{2} t^2 e^t \\ y_2 = \lambda e^t \end{cases}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} (t^2/2)e^t \\ (1-t^2/2)e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

La famille (X_1, X_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.

Cherchons une solution particulière.

$X(t) = \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$ avec λ et μ fonctions dérivables.

$$X' = A(t)X + B(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) \begin{pmatrix} (t^2/2)e^t \\ (1-t^2/2)e^t \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$\lambda(t) = 0$ et $\mu(t) = -t$ conviennent

$X(t) = \begin{pmatrix} -te^t \\ te^t \end{pmatrix}$ est solution particulière.

Solution générale :

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} (t^2/2)e^t \\ (1-t^2/2)e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -te^t \\ te^t \end{pmatrix}$$

Exercice 96 : [\[énoncé\]](#)

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$ et

$$E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$,

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$$

et

$$Y' = DY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Finalement

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Exercice 97 : [énoncé]

C'est un système différentiel de taille 2 linéaire à coefficients constant d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equation homogène : $X' = AX$.

$$\chi_A = (X - 1)(X - 2), \text{ Sp}(A) = \{1, 2\}, E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

Posons $Y = P^{-1}X$. On a $Y' = P^{-1}X'$ et donc $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$.

$$\text{Posons } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^t \\ y_2(t) = \lambda_2 e^{2t} \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \\ 2\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$X_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ définissent un système fondamental de solutions.

Solution particulière :

$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t)$ avec λ_1, λ_2 fonctions dérivables.

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow \lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$$

donc

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1'(t)e^t + \lambda_2'(t)e^{2t} = e^t \\ 2\lambda_1'(t)e^t + \lambda_2'(t)e^{2t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'(t) = 1 \\ \lambda_2'(t) = -2e^{-t} \end{cases}$$

$\lambda_1(t) = t$ et $\lambda_2(t) = 2e^{-t}$ conviennent

$X(t) = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix}$ est solution particulière.

Solution générale :

$$X(t) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

i.e.

$$\begin{cases} x_1(t) = 3\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} + (3t+2)e^t \\ x_2(t) = 2\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} + (2t+2)e^t \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 98 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sp}(A) = \{5, -3\}, E_5(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-3}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY + C(t)$ avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^t + 2e^{-3t} \\ -e^t + 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient

$$Y' = DY + C(t) \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{5t} - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{16}e^{-3t} \\ \mu e^{-3t} - \frac{1}{16}e^t + \frac{1}{2}te^{-3t} \end{pmatrix}$$

puis

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -te^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-3t} \\ -\frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2}te^{-3t} - \frac{1}{16}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

On peut aussi procéder par variation des constantes après résolution séparée de l'équation homogène.

Exercice 99 : [\[énoncé\]](#)

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\},$$

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$$

or

$$Y' = DY \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu e^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

donc

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 100 : [\[énoncé\]](#)

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = -X^2(X + 1).$$

Après triangularisation, on a $A = PTP^{-1}$ pour

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.

$$Y' = TY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 101 : [\[énoncé\]](#)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \chi_A = -(X - 2)(X^2 - X + 1).$$

La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable. La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la : $X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A , complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.

Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de tA .
 $\text{Sp}({}^tA) = \text{Sp}A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \text{Vect}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation
 $2x + y - z = 0$ est stable par tA .
 Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.

Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \Leftrightarrow Y' = BY$.
 Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} \\ y_2(t) = e^{\frac{1}{2}t} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

Exercice 102 : [énoncé]

- a) (S) est un système différentiel linéaire homogène de taille 3, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 3.
- b) Posons $m(t) = x(t) + y(t) + z(t)$. On constate $m'(t) = 0$ et donc le point M évolue sur un plan d'équation $x + y + z = a$. Posons $d(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$. On constate $d'(t) = 0$ et donc le point M évolue sur une sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- c) Le système s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie $A^3 = -3A$ et on en déduit $A^{2n+1} = (-3)^n A$ et $A^{2n+2} = (-3)A^2$ puis

$$\exp(t.A) = I_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} A + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n t^{2n+2}}{(2n+2)!} A^2$$

Ainsi

$$\exp(t.A) = I_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t)A + \frac{1}{3} (1 - \cos(\sqrt{3}t)) A^2$$

et la solution générale du système est

$$X(t) = X_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) AX_0 + \frac{1}{3} (1 - \cos(\sqrt{3}t)) A^2 X_0$$

Exercice 103 : [énoncé]

Puisque la matrice A n'est pas inversible, son rang est strictement inférieur à n et il existe donc un hyperplan H contenant l'image de A . Soit $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ une équation de cet hyperplan. Puisque les vecteur $X'(t)$ sont des valeurs prises par A , celles-ci appartiennent à l'hyperplan précédent et donc

$$a_1x_1'(t) + \dots + a_nx_n'(t) = 0$$

On en déduit

$$(a_1x_1(t) + \dots + a_nx_n(t))' = 0$$

et donc

$$a_1x_1(t) + \dots + a_nx_n(t) = C^{te}$$