

# Déterminants

## Groupe symétrique

### Exercice 1 [ 02231 ] [correction]

Soit  $n \geq 2$  et  $c$  la permutation circulaire  $c = (1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n)$ .

Déterminer toutes les permutations  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_n$  qui commutent avec  $c$ .

### Exercice 2 [ 02225 ] [correction]

Dans  $\mathcal{S}_n$  avec  $n \geq 2$ , on considère une permutation  $\sigma$  et un  $p$ -cycle :

$$c = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$$

Observer que la permutation  $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$  est un  $p$ -cycle qu'on précisera.

### Exercice 3 [ 02224 ] [correction]

Soient  $n$  un entier supérieur à 2,  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$  tel que  $i \neq j$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ .

Montrer que  $\sigma$  et  $\tau = (i \ j)$  commutent si, et seulement si,  $\{i, j\}$  est stable par  $\sigma$ .

### Exercice 4 [ 00121 ] [correction]

Soit  $H$  l'ensemble des  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  vérifiant  $\sigma(k) + \sigma(n+1-k) = n+1$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

Montrer que  $H$  est un sous-groupe de  $(\mathcal{S}_n, \circ)$

### Exercice 5 [ 02226 ] [correction]

Déterminer la signature de :

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

### Exercice 6 [ 02227 ] [correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer la signature de la permutation suivante :

$$\text{a) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}.$$

### Exercice 7 [ 02228 ] [correction]

Soit  $n \geq 2$  et  $\tau$  une transposition de  $\mathfrak{S}_n$ .

- Montrer que l'application  $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$  est une bijection de  $\mathcal{S}_n$  vers  $\mathcal{S}_n$ .
- En déduire le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{A}_n$  formé des permutations de signature 1 élément de  $\mathcal{S}_n$ .

### Exercice 8 [ 02230 ] [correction]

Soit  $n \geq 5$ .

Montrer que si  $(a \ b \ c)$  et  $(a' \ b' \ c')$  sont deux cycles d'ordre 3 de  $\mathcal{S}_n$ , alors il existe une permutation  $\sigma$ , paire, telle que

$$\sigma \circ (a \ b \ c) \circ \sigma^{-1} = (a' \ b' \ c')$$

## Formes multilinéaires alternées

### Exercice 9 [ 01410 ] [correction]

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Soient  $f$  une forme linéaire sur  $E$ ,  $p$  la projection vectorielle sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $q = \text{Id} - p$  sa projection complémentaire.

Montrer que l'application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  définie par

$$\varphi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée sur  $E$ .

### Exercice 10 [ 01413 ] [correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Montrer que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  :

$$\sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_j), \dots, x_n) = \text{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

## Déterminant d'un endomorphisme

### Exercice 11 [ 01411 ] [correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f^2 = -\text{Id}$ . Montrer que l'espace  $E$  est de dimension paire.

**Exercice 12** [ 01412 ] [\[correction\]](#)Soit  $V = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ .

- a) Montrer que  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dont on déterminera la dimension.  
 b) Montrer que l'application  $D : f \mapsto f'$  est un endomorphisme de  $V$  dont on calculera le déterminant.

**Exercice 13** [ 03071 ] [\[correction\]](#)Soit  $f$  un endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

- a) Montrer qu'il existe d'uniques complexes
- $a, b$
- tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$$

- b) Exprimer en fonction de
- $a$
- et
- $b$
- le déterminant de
- $f$
- .

**Exercice 14** [ 00752 ] [\[correction\]](#)Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$  déterminé par

$$\varphi_A(M) = AM$$

Calculer la trace et le déterminant de  $\varphi_A$ **Exercice 15** [ 03641 ] [\[correction\]](#)Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

- a) Montrer que  $A$  est inversible.  
 b) On suppose en outre

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} > 0$$

Montrer que  $\det A > 0$ .**Déterminant d'une matrice carrée****Exercice 16** [ 01414 ] [\[correction\]](#)Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  
 Former une relation liant  $\det(A)$  et  $\det(\bar{A})$ .**Exercice 17** [ 01415 ] [\[correction\]](#)Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  ${}^t A = \bar{A}$ . Montrer que  $\det A \in \mathbb{R}$ .**Exercice 18** [ 01416 ] [\[correction\]](#)Soit  $A$  une matrice antisymétrique réelle d'ordre  $2n + 1$ . Montrer que

$$\det A = 0$$

Ce résultat est-il encore vrai lorsque  $A$  est d'ordre pair ?**Exercice 19** [ 01417 ] [\[correction\]](#)Comparer  $\det(a_{i,j})$  et  $\det((-1)^{i+j} a_{i,j})$  où  $(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .**Exercice 20** [ 03382 ] [\[correction\]](#)Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} \in \{1, -1\}$$

Montrer

$$2^{n-1} \mid \det A$$

**Exercice 21** [ 00738 ] [\[correction\]](#)Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de colonnes  $C_1, \dots, C_n$ .Calculer le déterminant de la matrice  $B$  de colonnes

$$C_1 - C_2, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$$

**Exercice 22** [ 02355 ] [\[correction\]](#)Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ .Montrer que  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .**Exercice 23** [ 02603 ] [\[correction\]](#)On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est élément de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$  si la matrice  $A$  est à coefficients entiers, qu'elle est inversible et que son inverse est à coefficients entiers.

- a) Montrer que si
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$
- alors
- $|\det A| = 1$
- .

- b) Soient
- $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- vérifiant :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}, A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

Calculer  $\det A$  et  $\det B$ .

**Exercice 24** [ 02604 ] [\[correction\]](#)

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 2$ ) de colonnes  $A_1, \dots, A_n$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de colonnes  $B_1, \dots, B_n$  déterminées par

$$B_j = \sum_{i \neq j} A_i$$

Exprimer  $\det B$  en fonction de  $\det A$ .

**Exercice 25** [ 02695 ] [\[correction\]](#)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant pour tout  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

Montrer que  $\det A = 0$  puis  $A = 0$ .

**Exercice 26** [ 00229 ] [\[correction\]](#)

Soient  $A$  et  $H$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $\text{rg}H = 1$ . Montrer :

$$\det(A + H) \det(A - H) \leq \det A^2$$

**Exercice 27** [ 01587 ] [\[correction\]](#)

Soient  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  antisymétrique et  $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Etablir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det A$$

**Exercice 28** [ 03278 ] [\[correction\]](#)

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq 1$$

Montrer

$$|\det A| \leq 1$$

**Calcul de déterminants élémentaires****Exercice 29** [ 01418 ] [\[correction\]](#)

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} & \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\ \text{c) } \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} & \text{d) } \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \\ \text{e) } \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} & \text{f) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \end{array}$$

**Exercice 30** [ 01419 ] [\[correction\]](#)

Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Calculer  $\det(a_{\max(i,j)})$ .

En déduire en particulier  $\det(\max(i, j))$  et  $\det(\min(i, j))$ .

**Exercice 31** [ 01420 ] [\[correction\]](#)

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ . Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

**Exercice 32** [ 01421 ] [\[correction\]](#)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout  $1 \leq k \leq n$  on a

$$S_k = \sum_{i=1}^k i$$

**Exercice 33** [ 01423 ] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

- a) Calculer  ${}^t A \cdot A$ . En déduire  $\det A$ .  
b) Soient  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$ . Montrer qu'il existe  $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2$$

**Exercice 34** [ 03377 ] [correction]

a) Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

b) En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

**Exercice 35** [ 03366 ] [correction]

Montrer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

## Calculs de déterminants avancés

**Exercice 36** [ 01425 ] [correction]

Soient  $a \neq b$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}$$

- a) Montrer que  $\Delta_n(x)$  est une fonction affine de  $x$ .  
b) Calculer  $\Delta_n(x)$  et en déduire  $\Delta_n(0)$ .

**Exercice 37** [ 02693 ] [correction]

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n + x \end{vmatrix}$$

où  $x, a_1, \dots, a_n$  réels.

**Exercice 38** [ 00748 ] [correction]

Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on considère  $a_i \in \mathbb{R}$  et  $b_j \in \mathbb{R}$  tels que  $a_i + b_j \neq 0$ .  
Calculer

$$\det \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad [\text{déterminant de Cauchy}]$$

Traiter en particulier le cas où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = b_i = i \quad [\text{déterminant de Hilbert}]$$

**Exercice 39** [ 00299 ] [correction]

On pose

$$P_n(X) = X^n - X + 1 \quad (\text{avec } n \geq 2)$$

- a) Montrer que  $P_n$  admet  $n$  racines distinctes  $z_1, \dots, z_n$  dans  $\mathbb{C}$ .

b) Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$$

**Exercice 40** [03806] [\[correction\]](#)

[Déterminant de Hurwitz]

Soient  $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$H = \begin{pmatrix} a + \lambda_1 & (a) & & \\ & \ddots & & \\ (a) & & a + \lambda_n & \end{pmatrix}$$

**Exercice 41** [03124] [\[correction\]](#)

Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ . Calculer le déterminant de la matrice de coefficient

$$a_{i,j} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ b_j & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 42** [03578] [\[correction\]](#)

Soient un naturel  $n \geq 2$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  réels distincts de  $[0, \pi]$ .

On pose

$$P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_j - \cos x_i)$$

et on considère la matrice  $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos((j-1)x_i)$$

- a) Montrer que  $m_{i,j}$  est un polynôme en  $\cos x_i$  et donner son coefficient dominant.  
b) Calculer  $\det M_n$  en fonction de  $P_n$ .

**Exercice 43** [03577] [\[correction\]](#)

Pour une famille de  $n$  réels distincts  $(x_k)$  de  $[0, \pi]$ , on pose

$$P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_i - \cos x_j)$$

a) Combien le produit définissant  $P_n$  comporte-t-il de facteurs ?

b) Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$  écrire la matrice  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos((j-1)x_i)$$

c) Montrer que  $m_{i,j}$  est un polynôme en  $\cos x_i$ .

d) Calculer  $\det M$  en fonction de  $P_4$  et montrer  $|\det M| < 24$

## Calculs de déterminants par une relation de récurrence

**Exercice 44** [01426] [\[correction\]](#)

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 45** [01427] [\[correction\]](#)

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 46** [01428] [\[correction\]](#)

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 47** [ 01429 ] [correction]

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite  $(H_n)$  avec

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

**Exercice 48** [ 01430 ] [correction]

Calculer en établissant une relation de récurrence

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 49** [ 01431 ] [correction]

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} C_1^0 & C_1^1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & & \vdots \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \ddots & \vdots \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

en notant

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Exercice 50** [ 01432 ] [correction]

Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en notant par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Exercice 51** [ 03254 ] [correction]

Calculer le déterminant de

$$A_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

**Calculs de déterminants tridiagonaux****Exercice 52** [ 02584 ] [correction]Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ; calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 53** [ 01436 ] [correction]Soient  $a, b \in \mathbb{C}^*$  distincts. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

**Exercice 54** [ 00739 ] [correction]Soient  $x \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & (0) \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ (0) & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 55** [ 00740 ] [correction]Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 56** [ 00741 ] [correction]

Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ n & 0 & 2 & \\ & n-1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

**Exercice 57** [ 01433 ] [correction]Pour  $a \in \mathbb{K}^*$ , calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}$$

**Applications des déterminants****Exercice 58** [ 01422 ] [correction]

[Identité de Lagrange]

Calculer de deux façons :

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$$

**Exercice 59** [ 01441 ] [correction]Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Pour quelles valeurs de  $\lambda$ , a-t-on  $\det(A - \lambda I_3) = 0$ ?  
b) Déterminer une base  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**Exercice 60** [ 01442 ] [correction]Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon], A + xB \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

**Exercice 61** [ 01445 ] [correction]Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$  et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

- a) Calculer  $\det M$ .  
b) Déterminer, en fonction de  $\alpha$  le rang de  $M$ .

**Exercice 62** [ 01446 ] [correction]Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ .

a) Calculer le déterminant de

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & (b) \\ & \ddots \\ (b) & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

b) En déduire le rang de  $M(a, b)$  selon les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$ .

**Exercice 63** [ 03417 ] [correction]

On note  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  l'ensemble formé des matrices inversibles d'ordre  $n$  à coefficients entiers dont l'inverse est encore à coefficients entiers.

Soient  $a_1, \dots, a_n$  des entiers ( $n \geq 2$ ). Montrer qu'il existe une matrice de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  dont la première ligne est formée des entiers  $a_1, a_2, \dots, a_n$  si, et seulement si, ces entiers sont premiers dans leur ensemble.

**Exercice 64** [ 00749 ] [correction]

Etablir que l'inverse de la matrice  $H = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  est à coefficients entiers.

## Systèmes de Cramer

**Exercice 65** [ 01437 ] [correction]

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des éléments de  $\mathbb{K}$  deux à deux distincts.

Résoudre sur  $\mathbb{K}$  les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$$

**Exercice 66** [ 01438 ] [correction]

Résoudre

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2z = b \\ x + j^2y + jz = c \end{cases}$$

en fonction de  $a, b, c \in \mathbb{C}$ .

**Exercice 67** [ 01439 ] [correction]

Résoudre en fonction de  $a \in \mathbb{C}$  le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases}$$

**Exercice 68** [ 01440 ] [correction]

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$  distincts.

a) Résoudre

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

en introduisant :  $P = X^3 - (x + yX + zX^2)$

b) Même question pour

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^4 \\ x + by + b^2z = b^4 \\ x + cy + c^2z = c^4 \end{cases}$$

## Comatrice

**Exercice 69** [ 01443 ] [correction]

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

a) Justifier que  $\det A \in \mathbb{Z}$ .

b) Montrer que l'inverse de  $A$  existe et est à coefficients entiers si, et seulement si,  $\det A = \pm 1$ .

**Exercice 70** [ 01444 ] [correction]

Soient  $n$  un entier supérieur à 2 et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

a) Etablir

$$\begin{cases} \text{rg}(A) = n & \Rightarrow \text{rg}(\text{com}(A)) = n \\ \text{rg}(A) = n - 1 & \Rightarrow \text{rg}(\text{com}(A)) = 1 \\ \text{rg}(A) \leq n - 2 & \Rightarrow \text{rg}(\text{com}(A)) = 0 \end{cases}$$

b) Montrer

$$\det(\text{com}(A)) = (\det A)^{n-1}$$

c) En déduire

$$\text{com}(\text{com}(A))$$

**Exercice 71** [ 03142 ] [correction]Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .On suppose que les matrices  $A$  et  $B$  commutent. Montrer que les comatrices de  $A$  et  $B$  commutent.**Exercice 72** [ 03260 ] [correction]

Résoudre l'équation

$$\text{com}M = M$$

d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **Exercice 73** [ 03576 ] [correction]a) Donner le rang de  $B = {}^t(\text{com}A)$  en fonction de celui de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ b) On se place dans le cas où  $\text{rg}A = n - 1$ .Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$AC = CA = O_n$$

Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que

$$C = \lambda B$$

**Exercice 74** [ 02659 ] [correction]Soient des matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que  $\det A$  et  $\det B$  sont premiers entre eux.Montrer l'existence de  $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que

$$UA + VB = I_n$$

**Exercice 75** [ 03944 ] [correction]Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que la comatrice de  $S$  est symétrique.

## Déterminants de Vandermonde et apparentés

**Exercice 76** [ 00742 ] [correction]Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ . Calculer

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**Exercice 77** [ 02384 ] [correction]Calculer pour  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  le déterminant suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

**Exercice 78** [ 02385 ] [correction]

Calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

**Exercice 79** [ 02386 ] [correction]Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  distincts et  $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ . Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X - \lambda_1} & \frac{P(X)}{X - \lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X - \lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

## Calculs de déterminants par blocs

**Exercice 80** [ 03129 ] [correction]Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $D$  est inversible et que  $C$  et  $D$  commutent. Etablir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

**Exercice 81** [ 03130 ] [correction]Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $D$  inversible. Etablir

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

**Exercice 82** [ 02694 ] [\[correction\]](#)

Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $AC = CA$ . Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

**Exercice 83** [ 02387 ] [\[correction\]](#)

a) Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$$

b) Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ . Montrer que  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .

c) Trouver un contre-exemple à b) si  $A$  et  $B$  ne commutent pas.  
d) Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $AC = CA$ . Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

**Exercice 84** [ 01424 ] [\[correction\]](#)

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a) Montrer

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$$

b) Justifier

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0$$

**Exercice 85** [ 00198 ] [\[correction\]](#)

Soient  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

a) A quelle condition la matrice  $A$  est-elle inversible ?

b) Donner son inverse quand cela est possible.

**Exercice 86** [ 00713 ] [\[correction\]](#)

On considère une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ .

On écrit la comatrice de  $M$  sous une forme analogue

$$\text{com}M = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec  $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ .

Vérifier

$$\det A' = \det(M)^{p-1} \det D$$

**Exercice 87** [ 03147 ] [\[correction\]](#)

Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a) On suppose  $C^t D$  symétrique et  $D$  inversible. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A^t D - B^t C)$$

b) On suppose toujours  $C^t D$  symétrique mais on ne suppose plus  $D$  inversible. Montrer que l'égalité précédente reste vraie.

**Exercice 88** [ 03288 ] [\[correction\]](#)

Soient  $A, B, C, D$  des matrices carrées d'ordre  $n$ , réelles et commutant deux à deux. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si,  $AD - BC$  l'est.

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

Pour commencer, notons que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$   $c^{k-1}(1) = k$  et par conséquent  $c^{-(k-1)}(k) = 1$ .

Soit  $\sigma$  une permutation commutant avec  $c_n$ .

Posons  $k = \sigma(1) \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $s = c^{-(k-1)} \circ \sigma$  de sorte que  $s(1) = 1$ .

Comme  $\sigma$  et  $c$  commutent,  $s$  et  $c$  commutent aussi et on a pour tout  $2 \leq i \leq n$ ,  $s = c^{(i-1)} \circ s \circ c^{-(i-1)}$  d'où

$$s(i) = c^{(i-1)} \circ s \circ c^{-(i-1)}(i) = \sigma^{(i-1)} \circ s(1) = \sigma^{(i-1)}(1) = i \text{ car } c^{-(i-1)}(i) = 1.$$

Par conséquent  $s = \text{Id}$  puis  $\sigma = c^k$ .

Inversement les permutations de la forme  $c^k$  avec  $1 \leq k \leq n$  commutent avec  $c$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

Pour  $x = \sigma(a_i)$ , on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma(a_{i+1})$$

(en posant  $a_{p+1} = a_1$ ).

Pour  $x \notin \{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_p)\}$ , on a

$$(\sigma \circ c \circ \sigma^{-1})(x) = \sigma \circ \sigma^{-1}(x) = x$$

car  $c(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(x)$  puisque  $\sigma^{-1}(x) \notin \{a_1, \dots, a_p\}$ .

Ainsi

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ \sigma(a_2) \ \dots \ \sigma(a_p))$$

### Exercice 3 : [énoncé]

Si  $\{i, j\}$  est stable par  $\sigma$  alors  $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$ .

On a alors

$$\forall x \notin \{i, j\}, (\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(x) = (\tau \circ \sigma)(x)$$

Pour  $x = i$  alors  $(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(j) = (\tau \circ \sigma)(i)$  et pour  $x = j$ ,  $(\sigma \circ \tau)(j) = \sigma(i) = (\tau \circ \sigma)(j)$ .

Par suite

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$$

Inversement, si  $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$  alors  $\sigma(i) = (\sigma \circ \tau)(j) = (\tau \circ \sigma)(j) = \tau(\sigma(j))$ .

Puisque  $\tau(\sigma(j)) \neq \sigma(j)$  on a  $\sigma(j) \in \{i, j\}$ .

De même  $\sigma(i) \in \{i, j\}$  et donc  $\{i, j\}$  stable par  $\sigma$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

$H \subset S_n$ ,  $\text{Id} \in H$ . Remarquons,  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sigma(k) = n + 1 - \sigma(n + 1 - k)$ .

Soient  $\sigma, \sigma' \in H$ ,

$$(\sigma' \circ \sigma)(k) = \sigma'(\sigma(k)) = n + 1 - \sigma'(n + 1 - \sigma(k)) = n + 1 - \sigma' \circ \sigma(n + 1 - k)$$

donc  $\sigma' \circ \sigma \in H$ .

Soit  $\sigma \in H$ . Posons  $\ell = \sigma^{-1}(k)$ . On a

$$\sigma(n + 1 - \ell) = n + 1 - \sigma(\ell) = n + 1 - k$$

donc  $\sigma^{-1}(n + 1 - k) = n + 1 - \ell$  puis

$$\sigma^{-1}(k) + \sigma^{-1}(n + 1 - k) = \ell + (n + 1 - \ell) = n + 1$$

### Exercice 5 : [énoncé]

On note  $I(\sigma)$  le nombre d'inversions de la permutation  $\sigma$  :

$$I(\sigma) = \text{Card}(\{1 \leq i < j \leq n / \sigma(i) > \sigma(j)\})$$

On a  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$  et  $I(\sigma)$  se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

a)  $I(\sigma) = 2 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 17$  donc  $\varepsilon(\sigma) = -1$ .

b)  $I(\sigma) = 0 + 1 + 0 + 3 + 0 + 2 + 0 + 0 = 6$  donc  $\varepsilon(\sigma) = 1$ .

### Exercice 6 : [énoncé]

On note  $I(\sigma)$  le nombre d'inversions de la permutation  $\sigma$  :

$$I(\sigma) = \text{Card}(\{1 \leq i < j \leq n / \sigma(i) > \sigma(j)\})$$

On a  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$  et  $I(\sigma)$  se calcule en dénombrant, pour chaque de terme de la seconde ligne, le nombre de termes inférieurs qui le suit.

a)  $I(\sigma) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$  donc

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

b)  $I(\sigma) = 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) + 0 + \dots + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$  donc

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

**Exercice 7 : [énoncé]**

- a) L'application  $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$  est involutive, donc bijective.  
 b) L'application  $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$  transforme  $\mathcal{A}_n$  en  $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$  donc  $\text{Card} \mathcal{A}_n = \text{Card} \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ .  
 Or  $\mathcal{S}_n$  est la réunion disjointe de  $\mathcal{A}_n$  et de  $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$  donc

$$\text{Card} \mathcal{A}_n = \frac{1}{2} \text{Card} \mathcal{S}_n = \frac{n!}{2}$$

**Exercice 8 : [énoncé]**

Notons que

$$\sigma \circ (a \ b \ c) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a) \ \sigma(b) \ \sigma(c))$$

Soit  $\sigma : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$  une permutation définie par :

$$\sigma(a) = a', \sigma(b) = b' \text{ et } \sigma(c) = c'$$

Si  $\sigma$  est paire alors le problème est résolu.

Si  $\sigma$  est impaire alors soit  $c \neq d \in \mathbb{N}_n \setminus \{a, b, c\}$  et  $\tau = (c \ d)$ .  
 $\sigma \circ \tau$  est une permutation paire satisfaisante.

**Exercice 9 : [énoncé]**

$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ .

$\varphi(y, x) = f(p(y))f(q(x)) - f(p(x))f(q(y)) = -\varphi(x, y)$ . Il suffit d'étudier la linéarité en la 1ère variable.

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = f(p(\lambda x + \mu x'))f(q(y)) - f(p(y))f(q(\lambda x + \mu x'))$  or  $f, p$  et  $q$  sont linéaires donc

$\varphi(\lambda x + \mu x', y) = (\lambda f(p(x)) + \mu f(p(x')))f(q(y)) - f(p(y))(\lambda f(q(x)) + \mu f(q(x')))$  puis en développant et en réorganisant :  $\varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x', y)$ .  
 $\varphi$  est donc une forme bilinéaire antisymétrique donc alternée.

**Exercice 10 : [énoncé]**

L'application  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  définie par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_j), \dots, x_n)$$

est une forme  $n$ -linéaire alternée, donc il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\varphi = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}$ .

On a  $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \lambda$  et par suite

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, f(e_j), \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n a_{j,j} = \text{tr} f$$

avec  $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ .

**Exercice 11 : [énoncé]**

Posons  $n = \dim E$ . Comme  $\det(f^2) = \det(-I_n)$  on a  $\det(f)^2 = (-1)^n \geq 0$ , donc  $n$  est pair.

**Exercice 12 : [énoncé]**

a) Il est clair que  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

On pose  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_k(x) = x^k e^x$ .

$\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$  forme une base de  $V$ , donc  $\dim V = n + 1$ .

b) Pour  $f(x) = P(x)e^x$  on a  $D(f)(x) = f'(x) = (P(x) + P'(x))e^x$ .

$D$  est bien une application de  $V$  dans  $V$ .

De plus la linéarité de  $D$  découle de la linéarité de la dérivation et on peut donc conclure  $D \in \mathcal{L}(V)$ .

Puisque  $(x^k e^x)' = (x^k + kx^{k-1})e^x$  on a  $D(f_k) = f_k + kf_{k-1}$  donc a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite  $\det D = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$ .

**Exercice 13 : [énoncé]**

a) La famille  $(1, i)$  est une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

Pour  $a, b \in \mathbb{C}$ , l'application  $\varphi_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z}$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire et sa matrice dans la base  $(1, i)$  est

$$\begin{pmatrix} \text{Re}a + \text{Re}b & \text{Im}b - \text{Im}a \\ \text{Im}a + \text{Im}b & \text{Re}a - \text{Re}b \end{pmatrix}$$

Pour  $f$  endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  de matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

dans la base  $(1, i)$ , on a  $f = \varphi_{a,b}$  si, et seulement si,

$$\begin{cases} \text{Re}a + \text{Re}b = \alpha \\ \text{Im}a + \text{Im}b = \beta \\ \text{Im}b - \text{Im}a = \gamma \\ \text{Re}a - \text{Re}b = \delta \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution qui est

$$a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i \frac{\beta - \gamma}{2} \text{ et } b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i \frac{\beta + \gamma}{2}$$

b) Le déterminant de  $f$  vaut

$$\det f = \alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2$$

**Exercice 14 : [énoncé]**

Notons  $E_{i,j}$  les matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On observe

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

Par suite dans la base  $(E_{1,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$ , la matrice de l'endomorphisme  $\varphi_A$  est diagonale par blocs avec  $n$  blocs diagonaux tous égaux à  $A$ . On en déduit

$$\text{tr} \varphi_A = n \text{tr} A \text{ et } \det \varphi_A = (\det A)^n$$

**Exercice 15 : [énoncé]**

a) Notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$  et supposons

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0$$

Si  $m = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \neq 0$  alors, puisque pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j a_{i,j} = 0$$

on obtient

$$|\lambda_i| \leq \frac{\sum_{j \neq i} |\lambda_j| |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \leq m \frac{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < m$$

ce qui est absurde compte tenu de la définition de  $m$ .

Par suite, la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est libre et donc  $A$  inversible.

b) Considérons l'application  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A + xI_n)$ .

La fonction  $f$  est clairement polynomiale de monôme dominant  $x^n$ , elle est donc continue et de limite  $+\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

De plus, le résultat précédent s'applique à la matrice  $A + xI_n$  pour tout  $x \geq 0$  et donc  $f(x) \neq 0$  sur  $[0, +\infty[$ .

Par continuité, la fonction  $f$  ne peut prendre de valeurs  $\leq 0$  et donc

$$\forall x \geq 0, f(x) > 0$$

En particulier  $\det A = f(0) > 0$ .

**Exercice 16 : [énoncé]**

Par conjugaison d'une somme et de produits

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

**Exercice 17 : [énoncé]**

Ici  ${}^t A = \bar{A}$ , donc  $\det(A) = \det({}^t A) = \det \bar{A}$ .

Comme

$$\det \bar{A} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \overline{a_{\sigma(i),i}} = \overline{\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}} = \overline{\det A}$$

on peut conclure  $\det A \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 18 : [énoncé]**

Comme  ${}^t A = -A$  on a

$$\det A = \det {}^t A = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$$

donc  $\det A = 0$ .

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fournit un contre-exemple au second problème posé.

**Exercice 19 : [énoncé]**

Notons  $A = (a_{i,j})$  et  $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})$ . On a

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (-1)^{\sigma(i)+i} a_{\sigma(i),i}$$

en regroupant les puissances de  $(-1)$

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{i=1}^n \sigma(i)+i} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

puis

$$\det B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{n(n+1)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

Ainsi

$$\det B = (-1)^{n(n+1)} \det A = \det A$$

car  $n(n+1)$  est pair.

**Exercice 20 : [énoncé]**

En ajoutant la première colonne de  $A$  à chacune des suivantes, on obtient une matrice dont les colonnes d'indices 2 jusqu'à  $n$  ont pour coefficients 0, 2 ou  $-2$ . On peut donc factoriser 2 sur chacune de ces colonnes et l'on obtient

$$\det A = 2^{n-1} \det B$$

avec  $B$  une matrice dont les coefficients sont 0, 1 ou  $-1$  de sorte que  $\det B \in \mathbb{Z}$

**Exercice 21 : [énoncé]**

La somme des colonnes de  $B$  est nulle donc  $\det B = 0$ .

**Exercice 22 : [énoncé]**

On a

$$\det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A^2 + B^2)$$

car  $A$  et  $B$  commutent.

Or  $\det(A - iB) = \overline{\det(A + iB)}$  donc  $\det(A^2 + B^2) = z\bar{z} \geq 0$ .

**Exercice 23 : [énoncé]**

a)  $AA^{-1} = I_n$  donne  $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$  or  $\det A, \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$  donc  $\det A = \pm 1$ .

b) Posons  $P(x) = \det(A + xB)$ .  $P$  est une fonction polynomiale de degré inférieur à  $n$ .

Pour tout  $x \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ , on a  $P(x) = \pm 1$  donc  $P(x)^2 - 1 = 0$ .

Le polynôme  $P^2 - 1$  possède au moins  $2n + 1$  racines et est de degré inférieur à  $n$ , c'est donc le polynôme nul.

On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = \pm 1$ .

Pour  $x = 0$ , on obtient  $\det A = \pm 1$ .

Pour  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\det\left(\frac{1}{x}A + B\right) = \frac{P(x)}{x^n} \rightarrow 0$$

donne  $\det B = 0$ .

**Exercice 24 : [énoncé]**

On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de l'espace des colonnes,

$$\det A = \det_{\mathcal{B}}(A_1, \dots, A_n)$$

et

$$\det B = \det_{\mathcal{B}}(B_1, \dots, B_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n B_i, B_2, \dots, B_n\right)$$

avec

$$\sum_{i=1}^n B_i = (n-1) \sum_{i=1}^n A_i$$

Par suite

$$\det B = (n-1) \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, B_2 - \sum_{i=1}^n A_i, \dots, B_n - \sum_{i=1}^n A_i\right)$$

Ce qui donne

$$\det B = (n-1) \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n A_i, -A_2, \dots, -A_n\right) = (-1)^{n-1}(n-1) \det(A_1, \dots, A_n)$$

Finalement

$$\det B = (-1)^{n-1}(n-1) \det A$$

**Exercice 25 : [énoncé]**

Notons que pour  $n = 1$  : la relation  $\det(A + X) = \det A + \det X$  est vraie pour tout  $A$  et tout  $X$ .

On suppose dans la suite  $n \geq 2$ .

Pour  $X = A$ , la relation  $\det(A + X) = \det A + \det X$  donne  $2^n \det A = 2 \det A$  et donc  $\det A = 0$ .

La matrice  $A$  n'est donc pas inversible et en posant  $r < n$  égal à son rang, on peut écrire  $A = QJ_rP$  avec  $P, Q$  inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors  $X = QJ'_rP$  avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque  $A + X = QI_nP = QP$ , la matrice  $A + X$  est inversible et donc  $\det X = \det(A + X) \neq 0$ .

On en déduit que la matrice  $J'_r$  est l'identité et donc  $r = 0$  puis  $A = O_n$ .

**Exercice 26 : [énoncé]**

La matrice  $H$  est équivalente à la matrice  $J_1$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position  $(1, 1)$ . Notons  $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$H = QJ_1P$$

et introduisons  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  déterminée par

$$A = QBP$$

La relation

$$\det(A + H) \det(A - H) \leq \det A^2$$

équivaut alors à la relation

$$\det(B + J_1) \det(B - J_1) \leq \det B^2$$

Notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $B$  et  $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On a

$$\det(B + J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 + E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B - J_1) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 - E_1, C_2, \dots, C_n)$$

Par multilinéarité du déterminant

$$\det(B + J_1) = \det B + \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n) \text{ et } \det(B - J_1) = \det B - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)$$

d'où l'on tire

$$\det(B + J_1) \det(B - J_1) = \det B^2 - \det_{\mathcal{B}}(E_1, C_2, \dots, C_n)^2 \leq \det B^2$$

**Exercice 27 : [énoncé]**

En retranchant la première ligne aux autres lignes, le déterminant de la matrice  $A + xJ$  apparaît comme le déterminant d'une matrice où figure des  $x$  seulement sur la première ligne. En développant selon cette ligne, on obtient que  $\det(A + xJ)$  est une fonction affine de la variable  $x$ .

De plus

$$\det(A - xJ) = \det(-{}^t A - xJ) = (-1)^{2n} \det({}^t A + xJ)$$

et puisque la matrice  $J$  est symétrique

$$\det(A - xJ) = \det({}^t A + x{}^t J) = \det(A + xJ)$$

La fonction affine  $x \mapsto \det(A - xJ)$  est donc une fonction paire et par conséquent c'est une fonction constante. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A + xJ) = \det(A + 0 \cdot J) = \det A$$

**Exercice 28 : [énoncé]**

Raisonnons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La propriété est immédiate pour  $n = 1$ .

Supposons la propriété vérifiée pour  $n \geq 1$ .

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  vérifiant les propriétés énoncées. En développant le déterminant de  $A$  selon la première ligne, on obtient

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1,j} \Delta_{1,j}$$

avec  $\Delta_{1,j}$  mineur d'indice  $(1, j)$  de la matrice  $A$ .

Puisque la matrice définissant le mineur  $\Delta_{1,j}$  est à coefficients positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne est inférieure à 1, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et affirmer  $|\Delta_{1,j}| \leq 1$ .

On en déduit

$$|\det A| \leq \sum_{j=1}^{n+1} a_{1,j} \leq 1$$

Récurrence établie.

**Exercice 29 : [énoncé]**

a) En développant selon la première ligne,

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

b) En sommant les colonnes sur la première et en factorisant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

En retirant la première ligne aux suivantes et en développant sur la première colonne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c) \begin{vmatrix} a - b & b - c \\ c - a & a - b \end{vmatrix} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca))$$

c) En retranchant la première colonne aux suivantes puis en sommant les colonnes sur la première

$$D = \begin{vmatrix} a + b & b + c & c + a \\ a^2 + b^2 & b^2 + c^2 & c^2 + a^2 \\ a^3 + b^3 & b^3 + c^3 & c^3 + a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + b & c - a & c - b \\ a^2 + b^2 & c^2 - a^2 & c^2 - b^2 \\ a^3 + b^3 & c^3 - a^3 & c^3 - b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c - a & c - b \\ 2c^2 & c^2 - a^2 & c^2 - b^2 \\ 2c^3 & c^3 - a^3 & c^3 - b^3 \end{vmatrix}$$

En factorisant par 2 puis en retranchant la première colonne aux suivantes

$$D = 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$$

Enfin en factorisant on se ramène à un déterminant de Vandermonde

$$D = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Finalement

$$D = 2abc(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a)$$

d) En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la dernière)

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

e) En sommant toutes les colonnes sur la première et en factorisant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne aux suivantes et en factorisant

$$D = (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

donc

$$D = (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)((a-c)^2 - (b-c)^2)$$

puis

$$D = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c)$$

f) En retirant la première colonne aux suivantes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin a & \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$$

Par la formule de factorisation

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$D = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \begin{vmatrix} \sin \frac{b+a}{2} & \sin \frac{c+a}{2} \\ \cos \frac{b+a}{2} & \cos \frac{c+a}{2} \end{vmatrix}$$

puis

$$D = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \sin \frac{b-c}{2}$$

**Exercice 30 : [énoncé]**

$$\det(a_{\max(i,j)}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque colonne la précédente (en commençant par la première)

$$\det(a_{\max(i,j)}) = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \cdots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 0 & a_2 - a_3 & & a_{n-1} - a_n & a_n \\ & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ (0) & & & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

et donc

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{n-1} - a_n)a_n$$

Pour  $a_i = i$ ,

$$\det(a_{\max(i,j)}) = (-1)^{n-1}n$$

Pour  $a_i = n+1-i$ ,

$$\det(a_{\min(i,j)}) = 1$$

**Exercice 31 : [énoncé]**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \ddots & \ddots & \vdots & \\ \ddots & a_2 & & \\ (a_1) & & a_1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & a_1 - a_2 & & \\ (0) & & a_1 & \end{vmatrix} \star \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & a_1 - a_2 & & \\ a_1 & & a_1 & \end{vmatrix} = a_1(a_1 - a_2)^{n-1} \text{ via}$$

**Exercice 32 : [énoncé]**

Via  $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ ,  $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$ , ...,  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ ,  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  (dans cet ordre)

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 3 & \cdots & 3 \\ (0) & & \ddots & \vdots \\ n & & & \end{vmatrix} = n!$$

**Exercice 33 : [énoncé]**

a)  ${}^t A A = \text{diag}(\delta, \delta, \delta, \delta)$  avec  $\delta = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Par suite  $\det A = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

Or  $b, c, d$  fixés, par développement de déterminant, l'expression de  $\det A$  est un polynôme en  $a$  unitaire de degré 4 donc

$$\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

b) Avec des notations immédiates :  $AA' = A''$  avec :

$$\begin{cases} a'' = aa' - bb' - cc' - dd' \\ b'' = ab' + b'a + cd' - dc' \\ c'' = ac' - bd' + ca' + db' \\ d'' = ad' + bc' - cb' + da' \end{cases}$$

Par égalité des déterminants et considération de signes

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 (a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2)^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2)^2$$

et les quantités suivantes étant positives

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2$$

avec  $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$  par opérations.

**Exercice 34 : [énoncé]**

a) En factorisant les colonnes

$$\begin{aligned} C_1 &\leftarrow C_1 - C_2 \\ C_2 &\leftarrow C_2 - C_3 \\ &\vdots \\ C_{n-1} &\leftarrow C_{n-1} - C_n \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne  $a$  fois la précédente

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

et enfin en développant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

b) En séparant la première colonne en deux

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Puis en procédant à des combinaisons judicieuses sur les colonnes

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}$$

Enfin, par permutation des colonnes dans le deuxième déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

**Exercice 35 : [énoncé]**

En sommant toutes les colonnes sur la première

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la fin)

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

On développe selon la première colonne et on se ramène à

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} a & (b) \\ (b) & a \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

avec  $a = 1 - n$  et  $b = 1$ . La poursuite du calcul donne alors

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} n^{n-2}$$

d'où la formule proposée.

### Exercice 36 : [énoncé]

a) En retirant la première colonne aux suivantes

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a - \lambda_1 & \dots & a - \lambda_1 \\ b + x & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b + x & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]}$$

Puis en développant selon la première colonne on obtient une expression de la forme.

$$\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$$

b) Par déterminant triangulaire

$$\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b - a} \text{ et } \beta = \frac{b \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b - a}$$

### Exercice 37 : [énoncé]

En retirant la première colonne aux autres, on obtient un déterminant où ne figurent des  $x$  que sur la première colonne. En développant selon cette première colonne, on obtient une expression affine de la variable  $x$ .

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & (x) \\ \ddots & \\ (x) & a_n + x \end{vmatrix} = \alpha x + \beta$$

Il reste à déterminer les réels  $\alpha, \beta$  exprimant cette fonction affine.

D'une part

$$\beta = \begin{vmatrix} a_1 + x & (x) \\ \ddots & \\ (x) & a_n + x \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} a_1 & (0) \\ \ddots & \\ (0) & a_n \end{vmatrix} = a_1 \dots a_n$$

et d'autre part

$$\alpha = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_1 + x & (x) \\ \ddots & \\ (x) & a_n + x \end{vmatrix}_{x=0}'$$

La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants obtenus lorsqu'on ne dérive qu'une colonne

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & (0) \\ \vdots & \vdots & \\ (0) & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

où la colonne formée de 1 est à la position  $j$ . Chaque déterminant se calcule en développant selon la ligne ne contenant que le coefficient 1 et l'on obtient

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} a_i$$

### Exercice 38 : [énoncé]

$$D_n = \det \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \dots & \frac{1}{a_n + b_{n-1}} & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix}$$

Via  $C_1 \leftarrow C_1 - C_n, \dots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$  puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n) \dots (b_{n-1} - b_n)}{(a_1 + b_n) \dots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \dots & \frac{1}{a_n + b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}$$

Via  $L_1 \leftarrow L_1 - L_n, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$  puis factorisation :

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n) \dots (b_{n-1} - b_n)(a_1 - a_n) \dots (a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n) \dots (a_n + b_n)(a_n + b_1) \dots (a_n + b_{n-1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Par conséquent

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Puisque

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = 1!2! \dots (n-1)!$$

et

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) = \frac{(n+1)!}{1!} \frac{(n+2)!}{2!} \dots \frac{(2n)!}{n!}$$

on obtient dans le cas particulier

$$D_n = \frac{(1!2! \dots (n-1)!)^3 n!}{(n+1)!(n+2)! \dots (2n)!}$$

### Exercice 39 : [énoncé]

a) Par l'absurde, supposons que  $P_n$  possède une racine multiple  $z$ . Celle-ci vérifie

$$P_n(z) = P'_n(z) = 0$$

On en tire

$$z^n - z + 1 = 0 \quad (1) \text{ et } nz^{n-1} = 1 \quad (2)$$

(1) et (2) donnent

$$(n-1)z = n \quad (3)$$

(2) impose  $|z| \leq 1$  alors que (3) impose  $|z| > 1$ . C'est absurde.

b) Posons  $\chi(X)$  le polynôme caractéristique de la matrice étudiée. On vérifie

$$\chi(z_i) = \begin{vmatrix} 1 + z_1 - z_i & 1 & & (1) \\ & \ddots & \vdots & \\ & 1 & & \\ \vdots & & & \\ (1) & 1 & 1 + z_n - z_i & \end{vmatrix}$$

En retranchant la  $i$ -ème colonne à toutes les autres et en développant par rapport à la  $i$ -ème ligne, on obtient

$$\chi(z_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (z_j - z_i) = (-1)^{n-1} P'(z_i)$$

Cependant les polynômes  $\chi$  et  $P'$  ne sont pas de même degré... En revanche, les polynômes  $\chi$  et  $(-1)^n (P - P')$  ont même degré  $n$ , même coefficient dominant  $(-1)^n$  et prennent les mêmes valeurs en les  $n$  points distincts  $z_1, \dots, z_n$ . On en déduit qu'ils sont égaux. En particulier le déterminant cherché est

$$\chi(0) = (-1)^n (P(0) - P'(0)) = 2(-1)^n$$

### Exercice 40 : [énoncé]

On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a + \lambda_1 \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = \lambda_1 E_1 + aC$$

avec  $E_1$  colonne élémentaire et  $C$  colonne constituée de 1.

On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$\det H = \det (\lambda_1 E_1 + aC, \dots, \lambda_n E_n + aC)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne  $C$  apparaît deux fois. On obtient

$$\det H = \det(\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n) + \sum_{i=1}^n \det(\lambda_1 E_1, \dots, aC, \dots, \lambda_n E_n)$$

et donc

$$\det H = \prod_{i=1}^n \lambda_i + a \sum_{i=1}^n \left[ \prod_{k=1, k \neq i}^n \lambda_k \right]$$

**Exercice 41 :** [énoncé]

Notons  $D_n$  le déterminant recherché.

On décompose la première colonne en somme de deux colonnes

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1 E_1 + b_1 C$$

avec  $E_1$  colonne élémentaire et  $C$  colonne constituée de 1.

On décompose de même chacune des colonnes. On peut écrire

$$D_n = \det(a_1 E_1 + b_1 C, \dots, a_n E_n + b_n C)$$

On développe par multilinéarité et on simplifie sachant que le déterminant est nul lorsque la colonne  $C$  apparaît deux fois. On obtient

$$D_n = \det(a_1 E_1 + \dots + a_n E_n) + \sum_{i=1}^n \det(a_1 E_1, \dots, b_i C, \dots, a_n E_n)$$

et donc

$$D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n \left[ b_i \prod_{k=1, k \neq i}^n a_k \right]$$

**Exercice 42 :** [énoncé]

a)  $\cos(0 \cdot x_i)$  est un polynôme en  $\cos(x_i)$  de degré 0.

$\cos(1 \cdot x_i)$  est un polynôme en  $\cos(x_i)$  de degré 1.

Par récurrence double, on montre que  $\cos(jx_i)$  est un polynôme en  $\cos(x_i)$  de degré  $j$  en exploitant la relation :

$$\cos((j+1)x_i) + \cos((j-1)x_i) = 2 \cos(x_i) \cos(jx_i)$$

On peut aussi par récurrence affirmer que le coefficient dominant de  $\cos(jx_i)$  est  $2^{j-1}$  pour  $j \geq 1$ .

On peut même être plus précis et affirmer que  $\cos((j-1)x_i)$  est une expression polynomiale de degré  $j-1$  en  $\cos(x_i)$ .

d)  $\det M_n$  est une expression polynomiale en  $\cos(x_1)$  de degré au plus  $n-1$ .

Puisque  $\cos(x_2), \dots, \cos(x_n)$  sont  $n-1$  racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M_n = \lambda(x_2, \dots, x_n) \prod_{j=2}^n (\cos x_j - \cos x_1)$$

L'expression du coefficient  $\lambda(x_2, \dots, x_n)$  est polynomiale en  $\cos(x_2)$  de degré au plus  $n-2$  (car il y a déjà le facteur  $\cos(x_2) - \cos(x_1)$  dans le produit) et puisque  $\cos(x_3), \dots, \cos(x_n)$  en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2, \dots, x_n) = \mu(x_3, \dots, x_n) \prod_{j=3}^n (\cos x_j - \cos x_2)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M_n = \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos x_j - \cos x_i) = \alpha_n P$$

Il reste à déterminer la valeur de  $\alpha_n \dots$

Un calcul immédiat donne  $\alpha_2 = 1$ .

En développant selon la dernière ligne

$$\det M_n = \cos((n-1)x_n) \det M_{n-1} + \dots$$

où les points de suspensions contiennent une expression polynomiale en  $\cos(x_n)$  de degré  $< n-1$ .

En identifiant les coefficients dominant des expressions polynomiale en  $\cos(x_n)$  dans cette égalité, on obtient

$$\alpha_n = 2^{n-2} \alpha_{n-1}$$

Cette relation permet de conclure

$$\alpha_n = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

**Exercice 43 :** [énoncé]

a) Il y autant de facteurs que de paires  $\{i, j\}$  i.e.

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) & \cos(3x_1) \\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) & \cos(3x_2) \\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) & \cos(3x_3) \\ 1 & \cos x_4 & \cos(2x_4) & \cos(3x_4) \end{pmatrix}$$

c) La propriété est immédiate pour  $j = 1$  ou  $j = 2$ .Pour  $j = 3$ ,  $\cos(2x_i) = 2\cos^2 x_i - 1$ .Pour  $j = 4$ ,  $\cos(3x_i) = 4\cos^3 x_i - 3\cos x_i$ .d)  $\det M$  est une expression polynomiale en  $\cos(x_1)$  de degré au plus 3.Puisque  $\cos(x_2), \cos(x_3), \cos(x_4)$  sont 3 racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M = \lambda(x_2, x_3, x_4) \prod_{j=2}^4 (\cos x_1 - \cos x_j)$$

L'expression du coefficient  $\lambda(x_2, x_3, x_4)$  est polynomiale  $\cos(x_2)$  de degré au plus 2 (car il y a déjà le facteur  $\cos(x_1) - \cos(x_2)$  dans le produit) et puisque  $\cos(x_3), \cos(x_4)$  en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2, \dots, x_n) = \mu(x_3, x_4) \prod_{j=3}^4 (\cos x_2 - \cos x_j)$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M = \alpha \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\cos x_i - \cos x_j) = \alpha P_4$$

Il reste à déterminer la valeur de  $\alpha$ ...

Une démarche analogue à la précédente aurait donné

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) \\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) \\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) \end{vmatrix} = \beta P_3$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 \\ 1 & \cos x_2 \end{vmatrix} = \gamma P_2 \text{ avec } \gamma = -1$$

En développant  $\det M$  selon la dernière ligne et en considérant le coefficient dominant de  $\det M$  vu comme polynôme en  $\cos(x_3)$  on obtient

$$4\beta P_3 = (-1)^3 \alpha P_3$$

et de façon analogue on a aussi

$$2\gamma P_2 = (-1)^2 \beta P_2$$

On en déduit

$$\alpha = 8$$

Puisque  $\text{Card} \mathfrak{S}_4 = 24$ ,  $\det M$  peut se voir comme la somme de 24 termes qui sont tous inférieurs à 1 en valeur absolue. On en déduit

$$|\det M| \leq 24$$

Certains des termes (par exemple  $1 \times \cos(x_1) \times \cos(2x_2) \times \cos(3x_3)$ ) étant strictement inférieurs à 1 en valeur absolue, on a aussi

$$|\det M| < 24$$

**Exercice 44 : [énoncé]**Par les opérations élémentaires  $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$  puis  $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$  on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = D_{n-2}$$

Comme  $D_1 = 0$  et  $D_2 = 1$ , on a

$$D_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

**Exercice 45 : [énoncé]**Par les opérations élémentaires :  $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$  puis  $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$  on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & (1) \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ 1 & (1) & & & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

En développant, on parvient à la relation de récurrence

$$D_n = -2D_{n-1} - D_{n-2}$$

La suite  $(D_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $r^2 + 2r + 1 = 0$  de racine double  $-1$ .

Sachant  $D_1 = 0$  et  $D_2 = -1$ , on parvient à

$$D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$$

#### Exercice 46 : [énoncé]

En développant selon la deuxième ligne

$$D_n = - \begin{vmatrix} 1 & * & & \\ & \ddots & & \\ (0) & & 1 & \\ & & & [n-1] \end{vmatrix} + D_{n-1} = -1 + D_{n-1}$$

Puisque  $D_1 = 1$  on obtient

$$D_n = 2 - n$$

#### Exercice 47 : [énoncé]

En décomposant la dernière colonne en somme de deux colonnes

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & n & 1 & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 & \\ & \ddots & & \vdots & \\ (1) & & n & 0 & \\ & & & & [n] \end{vmatrix}$$

En retranchant la dernière colonne à chacune des autres

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & n & 1 & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & (0) & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \\ (0) & & n-1 & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

En développant selon la dernière colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & & (1) & 0 & \\ & \ddots & & \vdots & \\ (1) & & n & 0 & \\ & & & n & [n] \end{vmatrix} = nD_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$$

Par suite

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!}$$

donc

$$\frac{D_n}{n!} = D_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

puis

$$D_n = (1 + H_n)n!$$

#### Exercice 48 : [énoncé]

En décomposant la première ligne en somme de deux lignes

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & \\ a & a+b & & b & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ a & a & a+b & [n] & \\ & & & a & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & \\ a & a+b & & b & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ a & a & a+b & [n] & \\ & & & a+b & \end{vmatrix}$$

En retranchant la première colonne à toutes les autres dans le second déterminant, on obtient

$$D_n = aD_{n-1} + b^n$$

Par récurrence, on en déduit

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \text{ si } a \neq b$$

et

$$D_n = (n+1)a^n \text{ si } a = b$$

#### Exercice 49 : [énoncé]

En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ 0 & C_1^0 & C_1^1 & & & & \vdots \\ \vdots & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & \vdots \\ \vdots & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & & & 0 \\ 0 & C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & C_{n-2}^{n-2} & [n] \\ & & & & & & C_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne, on obtient

$$D_n = D_{n-1}$$

Ainsi

$$D_n = D_1 = 1$$

### Exercice 50 : [énoncé]

En retirant à chaque ligne la précédente (et en commençant par la dernière) on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

en vertu de la formule du triangle de Pascal

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

En développant selon la première colonne

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

Via  $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$  et en exploitant  $C_p^0 = C_{p+1}^0$ , on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^0 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} = D_n$$

Finalement

$$D_n = 1$$

### Exercice 51 : [énoncé]

Cas  $b = c$  :

C'est un calcul classique, on effectue  $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$  puis  $L_i \leftarrow L_i - L_1$  ( $i = 2, \dots, n$ ) pour triangulariser le déterminant et obtenir

$$\det A_n = (a + (n-1)b)(a - b)^{n-1}$$

Cas  $b \neq c$  :

Posons  $D_n = \det A_n$ . A chaque ligne on retranche la précédente

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c - a & a - b & & (0) \\ \ddots & \ddots & & \\ (0) & c - a & a - b & \end{vmatrix}$$

et on développe selon la dernière colonne

$$D_n = b(a - c)^{n-1} + (a - b)D_{n-1} \quad (\text{avec } n \geq 2)$$

Ainsi

$$D_n = b(a - c)^{n-1} + b(a - b)(a - c)^{n-2} + \dots + b(a - b)^{n-2}(a - c)^1 + (a - b)^{n-1}D_1$$

Par sommation géométrique des premiers termes

$$D_n = b(a - c)^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{a-b}{a-c}\right)^{n-1}}{1 - \frac{a-b}{a-c}} + a(a - b)^{n-1}$$

puis après simplification

$$D_n = \frac{b(a - c)^n - c(a - b)^n}{b - c}$$

### Exercice 52 : [énoncé]

Par développement d'un déterminant tridiagonal,

$$D_n = (a + b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

La suite  $(D_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $r^2 - (a + b)r + ab = 0$  de racines  $a$  et  $b$ .

Si  $a \neq b$  alors on peut écrire  $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$  et compte tenu des valeurs initiales, on obtient

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Si  $a = b$  alors on peut écrire  $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$  et on parvient cette fois-ci à

$$D_n = (n + 1)a^n$$

**Exercice 53 : [énoncé]**

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour  $n \geq 2$

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$(D_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $r^2 - (a+b)r + ab = 0$  de racines distinctes  $a$  et  $b$ .

On a  $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ .  $D_0 = 1$  et  $D_1 = a+b$  donnent

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

**Exercice 54 : [énoncé]**

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour  $n \geq 2$

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$$

$(D_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $r^2 - (1+x^2)r + x^2 = 0$  de racines 1 et  $x^2$ .

Si  $x^2 \neq 1$  alors  $D_n = \lambda + \mu x^{2n}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$D_0 = 1$  et  $D_1 = 1 + x^2$  donnent

$$D_n = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

Si  $x^2 = 1$  alors  $D_n = \lambda n + \mu$ .

$D_0 = 1$  et  $D_1 = 2$  donnent

$$D_n = n + 1$$

**Exercice 55 : [énoncé]**

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour  $n \geq 2$

$$D_n = 2 \cos \theta D_{n-1} - D_{n-2}$$

$(D_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0$  de racines  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$ .

Si  $\theta \neq 0$   $[\pi]$  alors  $D_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta$ .  $D_0 = 1$  et  $D_1 = 2 \cos \theta$  donnent

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta = 2 \cos \theta \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1/\tan \theta \end{cases}$$

Ainsi

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

Si  $\theta = 0$   $[2\pi]$  alors  $D_n = \lambda n + \mu$ .  $D_0 = 1$  et  $D_1 = 2$  donnent

$$D_n = n + 1$$

Si  $\theta = \pi$   $[2\pi]$  alors  $D_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$ .  $D_0 = 1$  et  $D_1 = 2$  donnent

$$D_n = (-1)^n(n+1)$$

**Exercice 56 : [énoncé]**

En développant selon la première colonne, puis la première ligne et en recommençant :  $D_n = (-n) \times 1 \times (2-n) \times 3$  etc...

Si  $n$  est pair le développement s'arrête sur le calcul de

$$\begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si  $n$  est impair le développement s'arrête par l'étape

$$\begin{vmatrix} 0 & n-2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} n-2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3(n-2) \begin{vmatrix} 0 & n \\ 1 & n \end{vmatrix} = 3n(n-2)$$

En écrivant  $n = 2p + 1$ , on parvient à

$$D_n = (-1)^{p+1}(1 \times 3 \times \cdots \times 2p+1)^2$$

**Exercice 57 : [énoncé]**

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour  $n \geq 2$

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

$(D_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $r^2 - 2ar + a^2 = 0$  de racines double  $a$ .

On a alors  $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

$D_0 = 1$  et  $D_1 = 2a$  donnent

$$D_n = (n+1)a^n$$

**Exercice 58 :** [énoncé]

D'une part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

D'autre part

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{vmatrix} = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

**Exercice 59 :** [énoncé]

a) Après calculs

$$\det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(4 - \lambda)(2 - \lambda)$$

On a donc

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, 2 \text{ ou } 4$$

b) Après résolution de l'équation  $f(x) = \lambda x$  pour  $\lambda = 1, 2$  ou  $4$ , on obtient

$$\varepsilon_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3, \varepsilon_2 = e_1 - e_2 + e_3 \text{ et } \varepsilon_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$$

convenables.

**Exercice 60 :** [énoncé]Notons  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ . On sait

$$\det(A + xB) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + xb_{\sigma(i),i})$$

La fonction  $x \mapsto \det(A + xB)$  est continue (car polynomiale) et ne s'annule pas en  $0$  (car  $\det(A) \neq 0$ ), donc elle ne s'annule pas sur un voisinage de  $0$  ce qui résout le problème posé.

**Exercice 61 :** [énoncé]

a) En écrivant la première colonne comme somme de deux colonnes on obtient

$$\det M = 1 - (-1)^n \alpha^n$$

b) Si  $\det M \neq 0$  alors  $M$  est inversible et  $\text{rg}M = n$ .Si  $\det M = 0$  alors  $M$  n'est pas inversible donc  $\text{rg}M < n$ .Or  $M$  possède une matrice extraite de rang  $n - 1$  donc  $\text{rg}M = n - 1$ .

Finalement

$$\text{rg}M = \begin{cases} n - 1 & \text{si } -\alpha \in U_n \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 62 :** [énoncé]

a) En sommant toutes les colonnes sur la première colonne

$$\det M(a, b) = (a + (n - 1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & \ddots & & \\ 1 & & & a \end{vmatrix}$$

puis en retirant la première ligne au suivante

$$\det M(a, b) = (a + (n - 1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a - b & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a - b \end{vmatrix} = (a + (n - 1)b)(b - a)^{n-1}$$

b) Si  $a = b = 0$  alors

$$\text{rg}M(a, b) = 0$$

Si  $a = b \neq 0$  alors

$$\text{rg}(M(a, b)) = 1$$

Si  $a \neq b$  et  $a + (n - 1)b \neq 0$  alors

$$\text{rg}M(a, b) = n$$

Si  $a \neq b$  et  $a + (n - 1)b = 0$  alors

$$\text{rg}M(a, b) = n - 1$$

car  $M(a, b)$  possède une matrice de rang  $n - 1$  inversible puisque  $a \neq b$  et  $a + (n - 2)b \neq 0$ .**Exercice 63 :** [énoncé]Soit  $A$  une matrice de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ . Le déterminant de  $A$  ainsi que celui de son inverse sont des entiers. Puisque

$$\det A \times \det A^{-1} = 1$$

on en déduit  $\det A = \pm 1$ . Inversement, si une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  est de déterminant  $\pm 1$  alors son inverse, qui s'exprime à l'aide de la comatrice de  $A$ , est à coefficients entiers. Ainsi les matrices de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  sont les matrices à coefficients entiers de déterminant  $\pm 1$ .

Soit  $A$  une matrice de  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  dont la première ligne est formée par les entiers  $a_1, \dots, a_n$ . En développant le calcul de  $\det A$  selon la première ligne de la matrice, on obtient une relation de la forme

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 1$$

avec les  $u_k$  égaux, au signe près, à des mineurs de la matrice  $A$ . Ces  $u_k$  sont donc des entiers et la relation qui précède assure que les entiers  $a_1, \dots, a_n$  sont premiers dans leur ensemble.

Pour établir la réciproque, raisonnons par récurrence sur  $n \geq 2$  pour établir qu'il existe une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , de déterminant 1, dont la première ligne est  $a_1, \dots, a_n$  premiers dans leur ensemble.

Pour  $n = 2$ . Soient  $a, b$  deux entiers premiers entre eux. Par l'égalité de Bézout, on peut écrire

$$au + bv = 1 \text{ avec } u, v \in \mathbb{Z}$$

Considérons alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -v & u \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

Celle-ci étant de déterminant 1, elle appartient à  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 2$ .

Soient  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$  des entiers premiers dans leur ensemble. Posons

$$d = \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$$

Les entiers  $d$  et  $a_{n+1}$  étant premiers entre eux, il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que

$$du + a_{n+1}v = 1$$

De plus, on peut écrire

$$a_1 = da'_1, \dots, a_n = da'_n$$

avec  $a'_1, \dots, a'_n$  premiers dans leur ensemble.

Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

de déterminant 1.

Considérons alors la matrice

$$\begin{pmatrix} da'_1 & da'_2 & \dots & da'_n & a_{n+1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} & 0 \\ -va'_1 & -va'_2 & \dots & -va'_n & u \end{pmatrix}$$

Celle-ci est à coefficients entiers et en développant son déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient 1.

Référence établie.

### Exercice 64 : [énoncé]

On a  $H^{-1} = \frac{1}{\det H} {}^t \text{com} H$  avec  $\text{com} H = (H_{i,j})$ .

Par opérations élémentaires,

$$\det \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n} = \frac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

En simplifiant les facteurs communs, on obtient

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = \frac{(-1)^{k+\ell} (n+k-1)!(n+\ell-1)!}{(k+\ell-1)(k-1)!(\ell-1)!(n-k)!(n-\ell)!}$$

puis

$$\frac{H_{k,\ell}}{\det H} = (-1)^{k+\ell} (k+\ell-1) \binom{n+k-1}{k+\ell-1} \binom{n+\ell-1}{k+\ell-1} \binom{k+\ell-2}{k-1} \in \mathbb{Z}$$

### Exercice 65 : [énoncé]

a) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$\begin{cases} x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ y = \frac{(d-a)(c-a)(c-d)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ z = \frac{(b-a)(d-a)(d-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \end{cases}$$

b) On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \neq 0$$

Par les formules de Cramer

$$x = \frac{(b-d)(c-d)(c-b)(d+b+c)}{(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)}$$

et  $y, z$  par symétrie.

### Exercice 66 : [énoncé]

Le système est de Cramer via déterminant de Vandermonde.

(1) + (2) + (3) donne

$$x = \frac{a+b+c}{3}$$

(1) +  $j^2$ (2) +  $j$ (3) donne

$$y = \frac{a+bj^2+cj}{3}$$

et (1) +  $j$ (2) +  $j^2$ (3) donne

$$z = \frac{a+bj+cj^2}{3}$$

### Exercice 67 : [énoncé]

Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \bar{a} & 1 & a \\ \bar{a}^2 & \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & \bar{a}(1-|a|^2) & 1-|a|^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-|a|^2 & a(1-|a|^2) \\ 0 & 0 & 1-|a|^2 \end{vmatrix}$$

Si  $|a| \neq 1$  alors le système est de Cramer et homogène

$$\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$$

Si  $|a| = 1$  alors le système équivaut à une seule équation

$$x + ay + a^2z = 0$$

car les deux autres lui sont proportionnelles. On en déduit

$$\mathcal{S} = \{(-ay - a^2z, y, z) / y, z \in \mathbb{C}\}$$

### Exercice 68 : [énoncé]

Les deux systèmes proposés sont de Cramer via déterminant de Vandermonde.

a) Si  $x, y, z$  est sa solution alors  $P(a) = P(b) = P(c) = 0$  et donc

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)$$

On en déduit

$$x = abc, y = -(ab + bc + ca) \text{ et } z = a + b + c$$

b) Introduisons

$$P = X^4 - (x + yX + zX^2)$$

Si  $x, y, z$  est solution alors  $P(a) = P(b) = P(c) = 0$  et donc

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$$

Puisque le coefficient de  $X^3$  dans  $P$  est nul, la somme des racines de  $P$  est nulle et donc

$$a + b + c + d = 0$$

puis

$$P = (X-a)(X-b)(X-c)(X + (a+b+c))$$

En développant, on obtient

$$x = \sigma_3\sigma_1, y = \sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 \text{ et } z = \sigma_1^2 - \sigma_2$$

avec  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  les expressions symétriques élémentaires en  $a, b, c$ .

### Exercice 69 : [énoncé]

a) Pour  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  on a

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

Par suite si tous les  $a_{i,j}$  sont entiers,  $\det A$  l'est aussi.

b) ( $\Rightarrow$ ) Si  $A$  et  $A^{-1}$  sont à coefficients entiers alors  $\det A \in \mathbb{Z}$  et  $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ .

Or  $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$

Donc  $\det A = \det A^{-1} = \pm 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Si  $\det A = \pm 1$  alors  $A$  est inversible car de déterminant non nul

Son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com } A = \pm {}^t \text{com } A$$

Or la comatrice de  $A$  est formée des cofacteurs de  $A$  qui sont des entiers car égaux à des déterminants de matrices à coefficients entiers (car extraits de  $A$ ).

Ainsi  $A^{-1}$  est une matrice à coefficients entiers

**Exercice 70 : [énoncé]**

a) Si  $\text{rg}(A) = n$  alors  $A$  est inversible et sa comatrice l'est alors aussi donc

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = n$$

Si  $\text{rg}(A) \leq n - 2$  alors  $A$  ne possède pas de déterminant extrait d'ordre  $n - 1$  non nul. Par suite  $\text{com}(A) = O_n$  et donc

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = 0$$

Si  $\text{rg}(A) = n - 1$ , exploitons la relation  $A^t \text{com}(A) = \det(A) \cdot I_n = O_n$ .

Soient  $f$  et  $g$  les endomorphismes de  $K^n$  canoniquement associés aux matrices  $A$  et  ${}^t \text{com}(A)$ .

On a  $f \circ g = 0$  donc  $\text{Img} \subset \ker f$ . Comme  $\text{rg}(f) = n - 1$ ,  $\dim \ker f = 1$  et par suite  $\text{rg}(g) \leq 1$ .

Ainsi  $\text{rg}(\text{com}(A)) \leq 1$ .

Comme  $\text{rg}(A) = n - 1$ , il existe un déterminant extrait non nul d'ordre  $n - 1$  et par suite  $\text{com}(A) \neq O_n$ .

Finalement

$$\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$$

b) Comme  $A^t \text{com}(A) = \det(A) \cdot I_n$  on a

$$\det(A) \det \text{com}(A) = (\det A)^n$$

Si  $\det A \neq 0$  alors

$$\det \text{com}(A) = (\det A)^{n-1}$$

Si  $\det A = 0$  alors  $\text{rg}(\text{com}(A)) \leq 1 < n$  donc

$$\det(\text{com}(A)) = 0$$

c) Si  $\text{rg}(A) = n$  alors

$${}^t \text{com}(\text{com}(A)) \cdot \text{com}(A) = \det(\text{com}(A)) \cdot I_n = \det(A)^{n-1} \cdot I_n$$

Donc

$${}^t \text{com}(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-1} \text{com}(A)^{-1}$$

Or  ${}^t \text{com}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$  donc

$${}^t \text{com}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$$

puis sachant  ${}^t(B)^{-1} = ({}^t B)^{-1}$  on a :

$$\text{com}(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-2} A$$

Si  $\text{rg}(A) \leq n - 1$  et  $n \geq 3$  alors  $\text{rg}(\text{com}A) \leq 1 \leq n - 2$  donc

$$\text{com}(\text{com}(A)) = O_n$$

Si  $n = 2$  alors pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } \text{com}(\text{com}(A)) = A$$

**Exercice 71 : [énoncé]**

Cas  $A$  et  $B$  inversibles

Puisque  $A$  et  $B$  commutent, leurs inverses commutent aussi

On en déduit

$$\frac{1}{\det A} {}^t(\text{com}A) \frac{1}{\det B} {}^t(\text{com}B) = \frac{1}{\det B} {}^t(\text{com}B) \frac{1}{\det A} {}^t(\text{com}A)$$

En simplifiant et en transposant on obtient

$$\text{com}(A) \text{com}(B) = \text{com}(B) \text{com}(A)$$

Cas général

Pour  $p$  assez grand, les matrices

$$A + \frac{1}{p} I_n \text{ et } B + \frac{1}{p} I_n$$

sont inversibles et commutent donc

$$\text{com} \left( A + \frac{1}{p} I_n \right) \text{com} \left( B + \frac{1}{p} I_n \right) = \text{com} \left( B + \frac{1}{p} I_n \right) \text{com} \left( A + \frac{1}{p} I_n \right)$$

En passant à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\text{com}(A) \text{com}(B) = \text{com}(B) \text{com}(A)$$

**Exercice 72 : [énoncé]**

Soit  $M$  solution de l'équation étudiée.

Puisque

$${}^t(\text{com}M)M = \det(M)I_n$$

on obtient

$${}^t M M = \det(M)I_n$$

et donc

$$\text{tr}({}^t MM) = n \det M$$

Or

$$\text{tr}({}^t MM) = \sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2$$

donc  $\det M \geq 0$ .

De plus, en passant la relation  ${}^t MM = \det(M)I_n$  au déterminant, on obtient

$$(\det M)^2 = (\det M)^n$$

Cas  $n \neq 2$

On obtient  $\det M = 0$  ou  $1$ .

Dans le cas  $\det M = 0$ , on obtient  $\text{tr}({}^t MM) = 0$  et donc  $M = O_n$ .

Dans le cas  $\det M = 1$ , on obtient  ${}^t MM = I_n$  et donc  $M$  est une matrice orthogonale de déterminant  $1$ .

Inversement, la matrice nulle et solution de l'équation étudiée et si  $M$  est une matrice orthogonale de déterminant  $1$  alors

$${}^t(\text{com}M)M = I_n = {}^t MM$$

ce qui donne  $\text{com}M = M$  sachant  $M$  inversible.

Cas  $n = 2$

Pour  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a  $\text{com}M = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$  et donc  $\text{com}M = M$  si, et seulement si,  $M$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

### Exercice 73 : [énoncé]

a) On sait  $AB = BA = \det(A)I_n$ .

Si  $\text{rg}A = n$  alors  $A$  est inversible donc  $B$  aussi et  $\text{rg}B = n$ .

Si  $\text{rg}A = n - 1$  alors  $\dim \ker A = 1$  et puisque  $AB = O_n$ ,  $\text{Im}B \subset \ker A$  puis  $\text{rg}B \leq 1$ .

De plus, la matrice  $A$  étant de rang exactement  $n - 1$ , elle possède un mineur non nul et donc  $B \neq O_n$ . Finalement  $\text{rg}B = 1$ .

Si  $\text{rg}A \leq n - 2$  alors tous les mineurs de  $A$  sont nuls et donc  $B = O_n$  puis  $\text{rg}B = 0$ .

b) Puisque  $\text{rg}A = n - 1$ ,  $\dim \ker A = 1$  et  $\dim \ker {}^t A = 1$ .

Il existe donc deux colonnes  $X$  et  $Y$  non nulles telles que

$$\ker A = \text{Vect}X \text{ et } \ker {}^t A = \text{Vect}Y$$

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $AM = MA = O_n$ .

Puisque  $AM = O_n$ ,  $\text{Im}M \subset \ker A = \text{Vect}X$  et donc on peut écrire par blocs

$$M = (\lambda_1 X \mid \dots \mid \lambda_n X) = XL$$

avec  $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ .

La relation  $MA = O_n$  donne alors  $XLA = O_n$  et puisque  $X \neq 0$ , on obtient  $LA = 0$  puis  ${}^t A^t L = 0$ . Ceci permet alors d'écrire  $L$  sous la forme  $L = \lambda^t Y$  puis  $M$  sous la forme

$$M = \lambda X^t Y$$

Inversement une telle matrice vérifie  $AM = MA = O_n$  et donc

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / AM = MA = O_n\} = \text{Vect}(X^t Y)$$

Cet espace de solution étant une droite et la matrice  $B$  étant un élément non nul de celle-ci, il est dès lors immédiat d'affirmer que toute matrice  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $AC = CA = O_n$  est nécessairement colinéaire à  $B$ .

### Exercice 74 : [énoncé]

Il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $u \det A + v \det B = 1$ .  $U = u^t (\text{com}A)$  et  $V = v^t (\text{com}B)$  conviennent alors.

### Exercice 75 : [énoncé]

Le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la comatrice de  $S$  est

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

avec  $\Delta_{i,j}$  le mineur d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $S$  i.e. le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de  $S$ . Or le déterminant d'une matrice est aussi celui de sa transposée et puisque la matrice  $S$  est symétrique, le mineur d'indice  $(i, j)$  est égal à celui d'indice  $(j, i)$ . On en déduit que la comatrice de  $S$  est symétrique.

### Exercice 76 : [énoncé]

On réalise les opérations élémentaires  $C_n \leftarrow C_n - x_1 C_{n-1}$ ,  $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - x_1 C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$  :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

On développe selon la première ligne et on factorise par ligne :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$$

On réitère

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \prod_{j=3}^n (x_j - x_2) \dots \prod_{j=n}^n (x_j - x_{n-1}) V_1(x_n)$$

avec  $V_1(x_n) = 1$ .

Ainsi

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

### Exercice 77 : [énoncé]

Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

avec  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$  et en particulier  $\alpha_{n-1} = -(a_1 + \dots + a_n)$ .

En procédant à l'opération  $C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k C_{k+1}$ , les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$a_i^n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k a_i^k = P(a_i) - \alpha_{n-1} a_i^{n-1} = -\alpha_{n-1} a_i^{n-1} \text{ car } P(a_i) = 0$$

Ainsi

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = -\alpha_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_n = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_j - a_i)$$

### Exercice 78 : [énoncé]

Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

avec  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$  et en particulier  $\alpha_k = (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}$  où les  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  désignent les expressions symétriques élémentaires en  $a_1, \dots, a_n$ .

En procédant à l'opération  $C_n \leftarrow C_n + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j C_{j+1} + \sum_{j=n}^{n-1} \alpha_j C_j$ , les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$P(a_i) - \alpha_k a_i^k = -\alpha_k a_i^k \text{ car } P(a_i) = 0$$

Ainsi

$$D_k = (-1)^{n+1-k} \sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \dots & a_1^{n-1} & a_1^k \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \dots & a_2^{n-1} & a_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \dots & a_n^{n-1} & a_n^k \end{vmatrix}$$

En permutant de façon circulaire les  $n - k$  dernières colonnes, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

### Exercice 79 : [énoncé]

En développant selon la première ligne, on peut affirmer que  $\Delta$  est un polynôme de degré inférieur à  $n - 1$ .

Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{k+1} \prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i) V_{n-1}(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_k, \dots, \lambda_n) = (-1)^{n+1} V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où  $V_n(a_1, \dots, a_n)$  désigne le Vandermonde de  $(a_1, \dots, a_n)$ .  
Le polynôme  $\Delta$  coïncide en  $n$  point avec le polynôme constant égal à  $(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , ils sont donc égaux.

**Exercice 80 :** [énoncé]

On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det D = \det(AD - BC) \det D$$

On peut alors conclure sachant  $\det D \neq 0$ .

**Exercice 81 :** [énoncé]

On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C) \det D = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

**Exercice 82 :** [énoncé]

Supposons pour commencer la matrice  $A$  inversible.

Par opérations par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(D - BA^{-1}C) \det A = \det(DA - BA^{-1}CA)$$

Or les matrices  $A$  et  $C$  commutent donc  $A^{-1}$  et  $C$  commutent aussi et

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = \det(DA - BC)$$

Supposons  $A$  non inversible.

Pour  $p$  assez grand, la matrice  $A_p = A + \frac{1}{p}I$  est inversible et commute avec  $C$  donc

$$\det \begin{pmatrix} A_p & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA_p - BC)$$

En passant à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$ , la continuité du déterminant donne

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$$

**Exercice 83 :** [énoncé]

a) En multipliant les  $n$  dernières lignes par  $i$  et les  $n$  dernières colonnes aussi :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & -A \end{pmatrix}$$

puis par opérations sur les lignes

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A & iB \\ A - iB & -A + iB \end{pmatrix}$$

et par opérations sur les colonnes

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A + iB & iB \\ 0 & -A + iB \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det(A + iB) \det(-A + iB)$$

et enfin

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB)$$

Les matrices  $A$  et  $B$  étant réelles, cette écriture est de la forme  $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$ .

b)  $\det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A^2 + B^2)$  car  $A$  et  $B$  commutent donc  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .

c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  par exemple.

d) Si  $A$  est inversible, on remarque

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

donc  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - CB)$  car  $A$  et  $C$  commutent.

On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :

Les applications  $A \mapsto \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  et  $A \mapsto \det(AD - CB)$  sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec  $C$ . Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec  $C$  : si  $A$  commute avec  $C$  alors pour tout  $\lambda > 0$  assez petit  $A + \lambda I_n$  est inversible et commute avec  $C$ ). Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

#### Exercice 84 : [énoncé]

a) Par opération sur les colonnes puis sur les lignes

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$$

b) De façon analogue

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ B+iA & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-iB & -B \\ 0 & A+iB \end{vmatrix} = |A+iB|^2 \geq 0$$

#### Exercice 85 : [énoncé]

a) Par les opérations  $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \dots, L_{2n} = L_{2n} + L_n$ ,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n & B \\ B+I_n & I_n+B \end{vmatrix}$$

Par les opérations  $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$ ,

$$\det A = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ O_n & I_n + B \end{vmatrix} = \det(I_n - B) \det(I_n + B)$$

Ainsi  $A$  est inversible si, et seulement si,  $I_n - B$  et  $I_n + B$  le sont (i.e.  $1, -1 \notin \text{Sp}B$ ).

On aurait aussi pu étudier le noyau de  $A$ .

b) On peut présumer que l'inverse de  $A$  est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M + BN & N + BM \\ BM + N & BN + M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M + BN = I_n \\ BM + N = O_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = (I_n - B^2)^{-1} \\ N = -B(I_n - B^2)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (I_n - B^2)^{-1} & -B(I_n - B^2)^{-1} \\ -B(I_n - B^2)^{-1} & (I_n - B^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

On aurait pu aussi inverser l'équation  $AX = Y$

#### Exercice 86 : [énoncé]

On introduit

$$N = \begin{pmatrix} {}^t A' & O_{p,n-p} \\ {}^t B' & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} {}^t A' + B^t B' & B \\ C^t A' + D^t B' & D \end{pmatrix}$$

Or

$$M^t(\text{com}M) = \begin{pmatrix} {}^t A' + B^t B' & {}^t C' + B^t D' \\ C^t A' + D^t B' & C^t C' + D^t D' \end{pmatrix} = (\det M)^n I_p$$

donc

$$MN = \begin{pmatrix} \det(M)I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

En passant cette relation au déterminant, on obtient

$$\det M \times \det {}^t A' = \det(M)^p \det D$$

puis facilement la relation proposée sachant  $\det M \neq 0$ .

#### Exercice 87 : [énoncé]

a) Cas  $D$  inversible

Sachant  $C^t D = D^t C$ , on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t D & O_n \\ -{}^t C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^t D - B^t C & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et en passant au déterminant on obtient la relation

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det^t D = \det (A^t D - B^t C) \det D$$

puis la relation voulue sachant  $\det D = \det^t D \neq 0$

b) Cas  $D$  non inversible

Posons  $r = \text{rg}C$ . On peut écrire  $C = P J_r Q$  avec  $P, Q$  inversibles et  $J_r$  la matrice (symétrique) dont tous les coefficients sont nuls sauf les  $r$  premiers de la diagonale qui sont égaux à 1. Considérons alors  $D' = D + \lambda P^t Q^{-1}$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On peut écrire

$$D' = P (P^{-1} D^t Q + \lambda I_n)^t Q^{-1}$$

Si  $-\lambda$  n'est pas valeur propre de  $P^{-1} D^t Q$ , la matrice  $D'$  est inversible.

Puisqu'une matrice n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, la matrice  $D'$  est assurément inversible quand  $\lambda \rightarrow 0^+$  avec  $\lambda$  assez petit.

De plus,  $C^t D'$  est symétrique car

$$C^t D' - D'^t C = C^t D + \lambda P J_r Q Q^{-1t} P - D^t C - \lambda P^t Q^{-1t} Q^t J_r^t P = 0$$

Par l'étude qui précède, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D' \end{pmatrix} = \det (A^t D' - B^t C)$$

et en passant à la limite quand  $\lambda \rightarrow 0^+$ , on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det (A^t D - B^t C)$$

### Exercice 88 : [énoncé]

Cas où la matrice  $A$  inversible :

Pour

$$P = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

on a

$$MP = \begin{pmatrix} A & O_n \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\det M = \det(MP) = \det A \times \det(-CA^{-1}B + D)$$

Or

$$\det A \times \det(-CA^{-1}B + D) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - BC)$$

car la matrice  $C$  commute avec les matrices  $A$  et  $B$ .

On en déduit

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Cas général :

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$  assez grand, la matrice  $A_p = A + 1/p I_n$  est inversible et les matrices  $A_p, B, C, D$  commutent deux à deux. Si on pose

$$M_p = \begin{pmatrix} A_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

l'étude qui précède donne

$$\det M_p = \det(A_p D - BC)$$

En faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , on obtient à la limite

$$\det M = \det(AD - BC)$$

Il est alors immédiat de conclure que l'inversibilité de  $M$  équivaut à celle de  $AD - BC$ .