

PGCD de deux entiers

Le Plus Grand Commun Diviseur de deux nombres entiers a et b est le nombre entier d qui permet d'obtenir les plus petits quotients quand on divise a et b par d

On dispose de trois techniques pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers a et b

★ Méthode de la décomposition

On décompose a et b en produit de facteurs premiers, puis on utilise la définition du PGCD pour le déterminer

PGCD = produit de chaque diviseur commun présent dans les décompositions des nombres a et b à la puissance la plus petite commune

Quel est le PGCD des deux nombres 798 et 945 ?

On obtient les résultats suivants quand on détermine les décompositions en facteurs premiers de ces deux nombres

$$\begin{array}{r|l} 798 & 2 \\ 399 & 3 \\ 133 & 7 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \quad 798 = 2 * 3 * 7 * 19 \quad \begin{array}{r|l} 945 & 5 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 945 = 3^3 * 5 * 7$$

Le PGCD de 798 et 945 noté $\text{PGCD}(798,945) = 3*7 = 21$

★ Méthode des divisions successives

La première division euclidienne à effectuer est celle des deux nombres a et b, le plus grand de ces nombres étant le dividende, le plus petit le diviseur.

Puis on continue à diviser les diviseurs et restes successifs jusqu'au moment où l'on effectue une division dont le reste est nul, le PGCD étant alors le diviseur de cette division.

Voilà ce que donne cette méthode avec les deux nombres 945 et 798

$$\begin{array}{r|l} 945 & 798 \\ \hline 147 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 798 & 147 \\ \hline 63 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 147 & 63 \\ \hline 21 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 63 & 21 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

La dernière division a un reste nul donc $\text{PGCD}(945,798) = 21$

★ Méthode des soustractions successives

La première soustraction à effectuer est celle des deux nombres a et b, le plus petit étant soustrait du plus grand.

Puis on continue à soustraire de la même manière les deux nombres qui se trouvent de part et d'autre du signe égal jusqu'au moment où le résultat est nul, le PGCD étant alors le nombre qui a donné ce résultat.

Voilà ce que donne cette méthode avec les deux nombres 945 et 798

$$\begin{array}{l} 945 - 798 = 147 \\ 210 - 147 = 63 \\ 21 - 21 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 798 - 147 = 651 \\ 147 - 63 = 84 \\ \text{La dernière soustraction a un résultat nul donc } \text{PGCD}(945,798) = 21 \end{array} \quad \begin{array}{l} 651 - 147 = 504 \\ 84 - 63 = 21 \end{array} \quad \begin{array}{l} 504 - 147 = 357 \\ 63 - 21 = 42 \end{array} \quad \begin{array}{l} 357 - 147 = 210 \\ 42 - 21 = 21 \end{array}$$

En utilisant ces trois méthodes, trouver les PGCD des couples suivants (594,187), (168,324), (735,440), (273,520), (646,374)