

# limites de fonctions contenant $e$ (expressions)

\* ?  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

On a donc une forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$

On fait le changement de variable suivant posons  $X = x^2$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X \rightarrow +\infty$   
l'expression devient  $\frac{e^X}{X}$  or d'après le cours  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$  donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$

\* ?  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

On a une forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x+1} \times \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}$

posons  $X = x+1$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $X \rightarrow +\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x+1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$  (Théorème du rapport de 2 polynômes)

Par conséquent  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x} = \infty$

\* ?  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

C'est une forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$

D'après le cours si  $d > 0$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^d} = +\infty$ , dans notre cas  $d = 3$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

\* ?  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{2x}$

Ce cas ne pose aucun problème car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = \infty \times \infty = \infty$

\* ?  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$

On a donc ici une forme indéterminée  $\infty \times 0$



D'après le cours si  $d > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^d e^{-x} = 0$

On fait un changement de variable en posant  $x = 2u$ , de ce fait l'expression devient:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x e^{-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \underline{0}$  ( $d=1$ )

\* ?  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

Ce qui donne une forme indéterminée  $\infty - \infty$

Transformons l'écriture  $e^x - x = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = e^x (1 - x e^{-x})$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (1 - x e^{-x})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x e^{-x} = 1$$

Par produit de limites, on en déduit que

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = +\infty}$$

\* ?  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{3x} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$$

On a une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$

On fait un changement de variable en posant  $x = 3u$  quand  $u \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

On  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$  d'après le cours

d'où  $\underline{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = 1}$

\* ?  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

C'est une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$

On fait un changement de variable en posant  $x = u^2$  quand  $u \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \underline{1}$  (d'après le cours)

\* ?  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{3x} - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{3x} - 1 = 0$$

Ce qui donne une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$



On transforme l'écriture de la limite pour faire apparaître une limite de cours connue

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{e^{3x} - 1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{3x} - 1}{3x}}$$

changement de variable en posant  $X = 3x$  quand  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0$  On obtient

$$\text{donc } \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{3x} - 1}{3x}} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$\begin{aligned} * ? \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{4x^2} & \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{4x} - 2e^{2x} + 1 = 0 \\ & \quad \lim_{x \rightarrow 0} 4x^2 = 0 \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{4x^2}} \right\} \text{forme indéterminée } \frac{0}{0}$$

On transforme l'écriture de la limite pour essayer de faire apparaître une limite connue du cours, ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2 \text{ puis on fait un}$$

changement de variable en posant  $X = 2x$  quand  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^2 = \underline{\underline{1}}$$

$$\begin{aligned} * ? \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = +\infty \\ & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 3e^x = -\infty \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x}} \right\} \text{Ce qui donne une forme indéterminée}$$

On transforme l'écriture de la limite pour essayer de faire apparaître

$$\text{des limites connues du cours donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + 2/e^x)}{e^x(1/e^x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2/e^x}{1/e^x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2e^{-x}}{e^{-x} - 3}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 2e^{-x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - 3 &= -3 \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2e^{-x}}{e^{-x} - 3}} \right\} \text{Par quotient de limites, } \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = -1/3}}$$

$$\begin{aligned} * ? \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5)e^x & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 5 = +\infty \\ & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5)e^x}} \right\} \text{Ce qui donne une forme indéterminée } \infty \times \infty$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^x - \lim_{x \rightarrow +\infty} 5e^x = \infty - \infty = \underline{\underline{0}} \text{ (limites du cours)}$$