

Rappel de cours : Une fonction f est continue en un point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

* Exemple 1: Soit la fonction $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

La fonction f est-elle continue en 0?

Pour cela cherchons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ } On obtient donc une forme indéterminée $0/0$ il faut lever cette indétermination. Pour cela il faut modifier l'écriture de la fonction f

Rappel de cours (formules d'addition trigonométrique)

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{si on pose } a=b \text{ on a } \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\text{de plus } \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \text{avec } a=b \text{ on a } \cos(0) = \cos^2 a + \sin^2 a$$

$$\text{On obtient donc } \left. \begin{array}{l} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ 1 = \cos^2 a + \sin^2 a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \rightarrow \cos 2a + 1 = 2 \cos^2 a \\ \text{Par différence} \rightarrow 1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a \end{array}$$

Dans notre cas $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ (il suffit de poser $x=2a$ dans la formule)

$$\text{Donc } f(x) = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{2}$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{2}$$

$$\text{Rappel } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{On a donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0 \quad \text{Par conséquent } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1 \times 0 = 0$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ on en déduit que la fonction f est continue en 0.

Rappel de cours : Une fonction f est continue en un point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

* Exemple 1 :

Sait la fonction $f(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

Pour cela cherchons $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -1/x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0^+$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = f(0) = 0$$

Cel la fonction f est continue en 0

* Exemple 2 :

Sait la fonction $h(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = 0$

La fonction h est-elle continue en 0 ?

Pour cela cherchons $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{FI } \frac{0}{0}$$

il faut donc lever l'indétermination

$$\text{Rappel } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et comme } \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x^2}} \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = 1$$

$$\text{et } \frac{x^2}{e^x - 1} = x \times \frac{x}{e^x - 1}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 0 \times 1 = 0 = h(0)$$

Cel la fonction h est continue en 0