

Axe de symétrie

Rappel : Pour déterminer qu'une droite verticale d'équation $x=a$ est un axe de symétrie, on utilise la formule suivante : si $f(a+h) - f(a-h) = 0$, alors la droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f représentant la fonction f .

* Exemple 1 : Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{-2x^2 + 4x + 6}$ avec $x \neq -1$ et $x \neq 3$

? La droite d'équation $x=1$ est-elle un axe de symétrie de C_f ?

Calculons $f(1+h) - f(1-h)$

$$f(1+h) = \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) + 3}{-2(1+h)^2 + 4(1+h) + 6} = \frac{1+2h+h^2 - 2-2h+3}{-2(1+2h+h^2) + 4+4h+6} = \frac{h^2+2}{-2-4h-2h^2+10+4h}$$

$$f(1+h) = \frac{h^2+2}{-2h^2+8}$$

$$f(1-h) = \frac{(1-h)^2 - 2(1-h) + 3}{-2(1-h)^2 + 4(1-h) + 6} = \frac{1-2h+h^2 - 2+2h+3}{-2(1-2h+h^2) + 4-4h+6} = \frac{h^2+2}{-2+4h-2h^2+10-4h}$$

$$f(1-h) = \frac{h^2+2}{-2h^2+8}$$

$$f(1+h) - f(1-h) = \frac{h^2+2}{-2h^2+8} - \left(\frac{h^2+2}{-2h^2+8} \right) = 0$$

Cel. la droite Δ d'équation $x=1$ est bien un axe de symétrie de la courbe C_f représentant la fonction f .

* Exemple 2 : Soit la fonction $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$? la droite Δ' d'équation $x = -5/6$ est-elle un axe de symétrie de C_f ?

$$\text{Calculons } f(-5/6+h) = 3(-5/6+h)^2 + 5(-5/6+h) - 8 = 3\left(\frac{25}{36} - \frac{10h}{6} + h^2\right) - \frac{25}{6} + 5h - 8$$

$$f(-5/6+h) = \frac{25}{12} - \frac{30h}{6} + 3h^2 - \frac{50}{12} + 5h - 8 = 3h^2 - \frac{25}{12} - \frac{96}{12} = 3h^2 - \frac{121}{12}$$

$$f(-5/6-h) = 3(-5/6-h)^2 + 5(-5/6-h) - 8 = 3\left(\frac{25}{36} + \frac{10h}{6} + h^2\right) - \frac{25}{6} - 5h - 8$$

$$f(-5/6-h) = \frac{25}{12} + \frac{30h}{6} + 3h^2 - \frac{50}{12} - 5h - \frac{96}{12} = 3h^2 - \frac{25}{12} - \frac{96}{12} = 3h^2 - \frac{121}{12}$$

$$f(-5/6+h) - f(-5/6-h) = 3h^2 - \frac{121}{12} - \left(3h^2 - \frac{121}{12}\right) = 0$$

Cel. la droite Δ' d'équation $x = -5/6$ est donc bien un axe de symétrie de la courbe C_f représentant la fonction f .