

Inéquation avec valeur absolue

Une inéquation avec une valeur absolue se résout généralement de la même manière qu'une équation avec une valeur absolue, c'est à dire qu'il faut discuter du signe de l'expression contenue entre les barres de valeur absolue afin de pouvoir éliminer les barres et résoudre l'inéquation proposée.

* Exemple 1 On se propose de résoudre l'inéquation $|-3x-5| < 8$ (I)

Il faut discuter de ses différents qui dépendent du signe de $-3x-5$

$$\bullet \text{ Si } -3x-5 \leq 0 \\ \Leftrightarrow -3x \leq 5 \\ \Leftrightarrow x \geq -5/3 \quad (1)$$

Alors dans ce cas
 $|-3x-5| = 3x+5$
et l'inéquation (I)

$$\text{devient } 3x+5 < 8 \\ \Leftrightarrow 3x < 8-5 \\ \Leftrightarrow 3x < 3 \\ \Leftrightarrow x < 1 \quad (2)$$

x doit vérifier (1) et (2)

$$\text{donc } x \in [-5/3; 1[$$

$$\text{Finalement } S(x) =]-13/3; 1[$$

$$\bullet \text{ Si } -3x-5 \geq 0 \\ \Leftrightarrow -3x \geq 5 \\ \Leftrightarrow x \leq -5/3 \quad (3)$$

Alors dans ce cas
 $|-3x-5| = -3x-5$
et l'inéquation (I)

$$\text{devient } -3x-5 < 8 \\ \Leftrightarrow -3x < 8+5 \\ \Leftrightarrow -3x < 13 \\ \Leftrightarrow x > -13/3 \quad (4)$$

x doit vérifier (3) et (4)

$$\text{donc } x \in]-13/3; -5/3]$$

* Exemple 2 On doit résoudre l'inéquation $|5x+4| \geq 7$ (I)

$$\bullet \text{ Si } 5x+4 \leq 0 \\ \Leftrightarrow 5x \leq -4 \\ \Leftrightarrow x \leq -4/5 \quad (1)$$

Alors dans ce cas
 $|5x+4| = -5x-4$
et l'inéquation (I)

$$\text{devient } -5x-4 \geq 7 \\ \Leftrightarrow -5x \geq 7+4 \\ \Leftrightarrow -5x \geq 11 \\ \Leftrightarrow x \leq -11/5 \quad (2)$$

x doit vérifier (1) et (2)

$$\text{donc } x \in]-\infty; -11/5]$$

$$\bullet \text{ Si } 5x+4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 5x \geq -4 \\ \Leftrightarrow x \geq -4/5 \quad (3)$$

Alors dans ce cas
 $|5x+4| = 5x+4$
et l'inéquation (I)

$$\text{devient } 5x+4 \geq 7 \\ \Leftrightarrow 5x \geq 7-4 \\ \Leftrightarrow 5x \geq 3 \\ \Leftrightarrow x \geq 3/5 \quad (4)$$

x doit vérifier (3) et (4)

$$\text{donc } x \in [3/5; +\infty[$$

$$\text{Finalement } S(x) =]-\infty; -11/5] \cup [3/5; +\infty[$$

Inéquation avec valeurs absolues

* Exemple 3 On veut résoudre l'inéquation suivante $|-2x-7| < |3x+5|$ (I)

Il faut faire une étude des signes des contenus des valeurs absolues afin de pouvoir balayer les bornes et réaliser la résolution de l'inéquation

Étape 1 On résout $-2x-7=0 \Leftrightarrow -2x=7 \Leftrightarrow x=-7/2$ et $3x+5=0 \Leftrightarrow 3x=-5 \Leftrightarrow x=-5/3$, que l'on va placer dans un tableau d'expressions

Étape 2 Tableau d'expressions

x	$-\infty$	$-7/2$	$-5/3$	0	$+\infty$
$ -2x-7 $	$-2x-7$	0	$2x+7$	$2x+7$	
$ 3x+5 $	$-3x-5$	$-3x-5$	0	$3x+5$	
$ -2x-7 < 3x+5 $	$-2x-7 < -3x-5$	$2x+7 < -3x-5$		$2x+7 < 3x+5$	

On doit donc résoudre trois inéquations différentes suivant la valeur de x

si $x \in]-\infty; -7/2[$ (1) (I) devient $-2x-7 < -3x-5$
 $\Leftrightarrow -2x+3x < 7-5$
 $\Leftrightarrow x < 2$ (2)

x doit vérifier (1) et (2) donc $x \in]-\infty; -7/2[$ (1)'

si $x \in [-7/2; -5/3]$ (3) (I) devient $2x+7 < -3x-5$
 $\Leftrightarrow 2x+3x < -7-5$
 $\Leftrightarrow 5x < -12$
 $\Leftrightarrow x < -12/5$ (4)

x doit vérifier (3) et (4) donc $x \in [-7/2; -12/5[$ (2)'

si $x \in [-5/3; +\infty[$ (5) (I) devient $2x+7 < 3x+5$
 $\Leftrightarrow 2x-3x < 5-7$
 $\Leftrightarrow -x < -2$
 $\Leftrightarrow x > 2$ (6)

x doit vérifier (5) et (6) donc $x \in]2; +\infty[$ (3)'

Finalement $S(I) =]-\infty; -12/5[\cup]2; +\infty[$

On fait la réunion des intervalles (1)', (2)' et (3)'