

Inéquation du second degré

Pour résoudre une inéquation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c \begin{cases} \leq \\ < \\ \geq \\ > \end{cases} 0$, avec $a \neq 0$, on résout d'abord l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, puis on applique le théorème du signe d'un trinôme du second degré pour déterminer les solutions de l'inéquation.

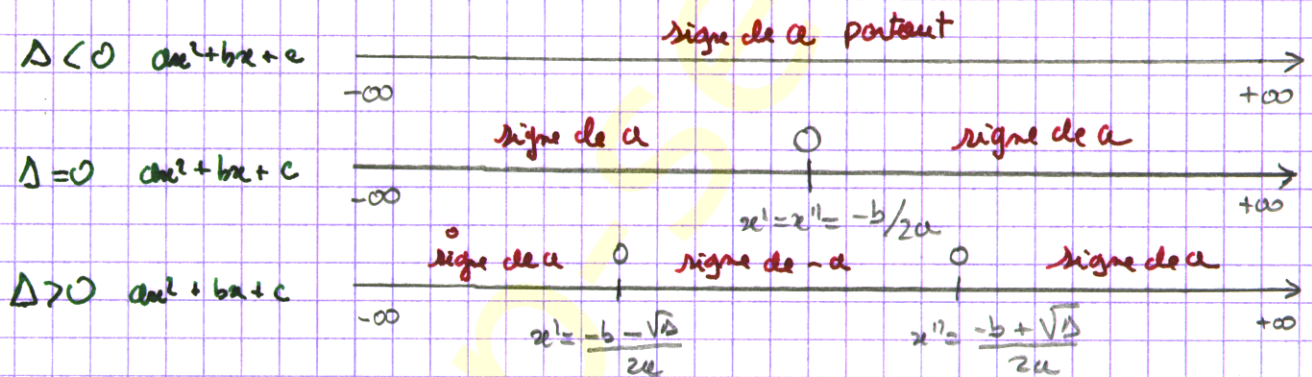
Théorème du signe d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

si $\Delta < 0$ $ax^2 + bx + c$ est partout du signe de a

si $\Delta = 0$ $ax^2 + bx + c$ est partout du signe de a sauf pour la valeur $x = -b/2a$ où il s'annule

si $\Delta > 0$ $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines x' et x'' , et du signe de $-a$ à l'intérieur.



* Exemple 1

Résolve l'inéquation du second degré suivante

$$-3x^2 + 5x + 3 \geq 0$$

On résout d'abord l'équation du second degré $-3x^2 + 5x + 3 = 0$

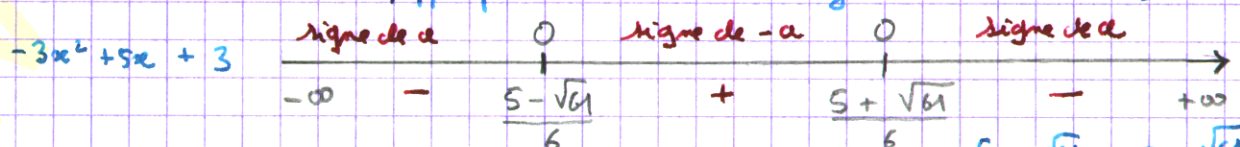
$$a = -3 \quad b = 5 \quad c = 3 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(-3) \times 3 = 25 + 36 = 61$$

$\Delta > 0$ il y a donc deux solutions distinctes

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{61}}{-6} = \frac{5 + \sqrt{61}}{6}$$

$$\text{et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{61}}{-6} = \frac{5 - \sqrt{61}}{6}$$

Puis on applique le théorème du signe d'un trinôme du second degré



On veut $-3x^2 + 5x + 3 \geq 0$ donc $S = \left[\frac{5 - \sqrt{61}}{6} ; \frac{5 + \sqrt{61}}{6} \right]$

Inéquation du second degré

* Exemple 2

On veut résoudre l'inéquation du second degré $2x^2 + x + 3 < 0$

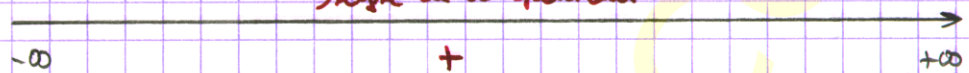
On résout d'abord l'équation du second degré $2x^2 + x + 3 = 0$

$$a=2 \quad b=1 \quad c=3 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23$$

$\Delta < 0$ Il n'y a pas de solution à l'équation

Puis on applique le théorème du signe d'un trinôme du second degré
signe de a partout

$$2x^2 + x + 3$$



On veut $2x^2 + x + 3 < 0$ donc aucune solution $S = \{\emptyset\}$

* Exemple 3

On doit résoudre l'inéquation du second degré $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$

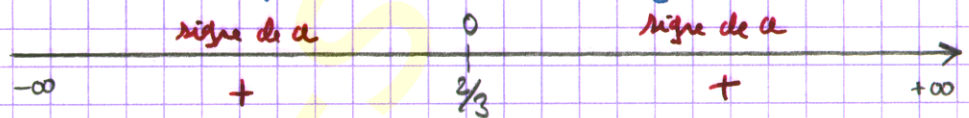
Pour cela, on résout la première l'équation $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$$a=9 \quad b=-12 \quad c=4 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$$

$\Delta = 0$ Il y a une solution double $x' = x'' = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Puis on applique le théorème du signe d'un trinôme du second degré

$$9x^2 - 12x + 4$$



On veut $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ donc une seule solution $S = \{2/3\}$

* Exemple 4

On se propose de résoudre l'inéquation du second degré

$$2x^2 + 6x + 1 < 0$$

On résout d'abord l'équation du second degré $2x^2 + 6x + 1 = 0$

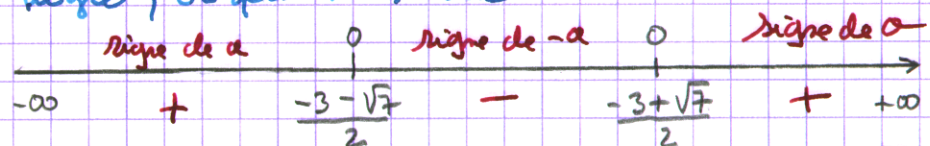
$$a=2 \quad b=6 \quad c=1 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 2 \times 1 = 36 - 8 = 28$$

$\Delta > 0$ Il y a deux solutions distinctes $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{28}}{4}$

$$x' = \frac{-6 - 2\sqrt{7}}{4} = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{28}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}$$

Puis on applique le théorème du signe d'un trinôme du second degré, ce qui nous donne

$$2x^2 + 6x + 1$$



On veut $2x^2 + 6x + 1 < 0$ donc $S =]\frac{-3 - \sqrt{7}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}[$