

Forme canonique

Mettre un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ sous forme canonique, c'est transformer l'écriture du polynôme pour le mettre sous la forme $a(x - x_S)^2 + y_S$ avec x_S et y_S à déterminer par le calcul.

* Exemple 1

$$\begin{aligned} 3x^2 + 7x - 5 &= 3 \left(x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{5}{3} \right) & \text{avec } \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 &= x^2 + 2x \frac{7}{6} + \frac{49}{36} \\ 3x^2 + 7x - 5 &= 3 \left(\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} - \frac{5}{3} \right) & \text{donc } \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 &= x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} \\ 3x^2 + 7x - 5 &= 3 \left(\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} - \frac{60}{36} \right) & \text{et } \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} &= x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{109}{36} \\ 3x^2 + 7x - 5 &= 3 \left(\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{109}{36} \right) \end{aligned}$$

Finalement $3x^2 + 7x - 5 = 3 \left(x - \left(-\frac{7}{6}\right) \right)^2 - \frac{109}{12}$ d'où $x_S = -\frac{7}{6}$ et $y_S = -\frac{109}{12}$

* Exemple 2

$$\begin{aligned} -7x^2 + 11x - 4 &= -7 \left(x^2 - \frac{11}{7}x + \frac{4}{7} \right) & \text{avec } \left(x - \frac{11}{14}\right)^2 &= x^2 - \frac{2x \cdot 11}{14} + \frac{121}{196} \\ -7x^2 + 11x - 4 &= -7 \left(\left(x - \frac{11}{14}\right)^2 - \frac{121}{196} + \frac{4}{7} \right) & \text{donc } \left(x - \frac{11}{14}\right)^2 &= x^2 - \frac{11}{7}x + \frac{121}{196} \\ -7x^2 + 11x - 4 &= -7 \left(\left(x - \frac{11}{14}\right)^2 - \frac{121}{196} + \frac{112}{196} \right) & \text{et } \left(x - \frac{11}{14}\right)^2 - \frac{121}{196} &= x^2 - \frac{11}{7}x - \frac{9}{196} \\ -7x^2 + 11x - 4 &= -7 \left(\left(x - \frac{11}{14}\right)^2 - \frac{9}{196} \right) \end{aligned}$$

Finalement $-7x^2 + 11x - 4 = -7 \left(x - \frac{11}{14} \right)^2 + \frac{9}{28}$ d'où $x_S = \frac{11}{14}$ et $y_S = \frac{9}{28}$

* Exemple 3

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x + 12 &= 4(x^2 + 2x + 3) & \text{avec } (x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ 4x^2 + 8x + 12 &= 4((x+1)^2 - 1 + 3) & \text{donc } (x+1)^2 - 1 &= x^2 + 2x \\ 4x^2 + 8x + 12 &= 4((x+1)^2 + 2) \end{aligned}$$

Finalement $4x^2 + 8x + 12 = 4((x - (-1))^2 + 2)$ d'où $x_S = -1$ et $y_S = 8$