

Fonction $f(x)$ s'écrit avec une valeur absolue

Quand une fonction $f(x)$ s'écrit avec une ou plusieurs valeurs absolues, on ne peut pas la manipuler directement, il faut d'abord écrire les bornes de valeur absolue pour pouvoir jouer des valeurs avec la fonction, ce travail de bornes se fait cependant sous conditions.

On se propose de résoudre l'équation $f(x) = -2$ et l'inéquation $f(x) \leq 3$ avec $f(x) = -3|-5x-7| + |6x-3| - |3x+5| + 2|-7x+4|$

La première chose à faire est de chercher les valeurs qui annulent chaque valeur absolue car l'expression continue dans la valeur absolue change de signe de part et d'autre de la valeur qui l'annule.

On résout donc les équations suivantes

$$\begin{aligned} -5x - 7 = 0 &\Leftrightarrow -5x = 7 \Leftrightarrow x = -7/5 & 6x - 3 = 0 &\Leftrightarrow 6x = 3 \Leftrightarrow x = 3/6 = 1/2 \\ 3x + 5 = 0 &\Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -5/3 & -7x + 4 = 0 &\Leftrightarrow -7x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Ensuite on détermine l'expression de $f(x)$ grâce à un tableau d'expressions

x	$-\infty$	$-5/3$	$-7/5$	0	$1/2$	$4/7$	$+\infty$	
$ -5x-7 $	$-5x-7$	$-5x-7$	0	$5x+7$	$5x+7$	$5x+7$		
$-3 -5x-7 $	$15x+21$	$15x+21$	0	$-15x-21$	$-15x-21$	$-15x-21$		✓
$ 6x-3 $	$-6x+3$	$-6x+3$		$-6x+3$	0	$6x-3$		✓
$ 3x+5 $	$-3x-5$	0	$3x+5$	$3x+5$	$3x+5$	$3x+5$		
$- 3x+5 $	$3x+5$	0	$-3x-5$	$-3x-5$	$-3x-5$	$-3x-5$		✓
$ -7x+4 $	$-7x+4$	$-7x+4$		$-7x+4$	$-7x+4$	0	$7x-4$	
$2 -7x+4 $	$-14x+8$	$-14x+8$		$-14x+8$	$-14x+8$	0	$14x-8$	✓
$f(x)$	$-2x+37$	$-8x+27$		$-38x-15$	$-26x-21$		$2x-37$	

Pour remplir le tableau, on a utilisé la définition de la valeur absolue qui précise que $|E(x)| = E(x)$ si $E(x) \geq 0$ et que $|E(x)| = -E(x)$ si $E(x) \leq 0$. On a aussi utilisé des lignes horizontales afin de faciliter le remplissage.

Fonction $f(x)$ s'écrit avec des valeurs absolues

Le tableau d'expressions nous donne les résultats suivants :

Si $x \in]-\infty; -5/3]$ alors $f(x) = -2x + 37$

Si $x \in [-5/3; -7/5]$ alors $f(x) = -8x + 27$

Si $x \in [-7/5; 1/2]$ alors $f(x) = -38x - 15$

Si $x \in [1/2; 4/7]$ alors $f(x) = -26x - 21$

Si $x \in [4/7; +\infty[$ alors $f(x) = 2x - 37$

On peut donc maintenant résoudre l'équation $f(x) = -2$, pour cela il faut lier les cinq cas différents qui correspondent aux cinq cas possibles de $f(x)$

On résout donc cinq équations différents

1) $-2x + 37 = -2 \Leftrightarrow -2x = -2 - 37 \Leftrightarrow -2x = -39 \Leftrightarrow x = 39/2$ et $39/2 \notin]-\infty; -5/3]$

2) $-8x + 27 = -2 \Leftrightarrow -8x = -2 - 27 \Leftrightarrow -8x = -29 \Leftrightarrow x = 29/8$ et $29/8 \notin [-5/3; -7/5]$

3) $-38x - 15 = -2 \Leftrightarrow -38x = -2 + 15 \Leftrightarrow -38x = 13 \Leftrightarrow x = -13/38$ et $-13/38 \in [-7/5; 1/2]$

4) $-26x - 21 = -2 \Leftrightarrow -26x = -2 + 21 \Leftrightarrow -26x = 19 \Leftrightarrow x = -19/26$ et $-19/26 \notin [1/2; 4/7]$

5) $2x - 37 = -2 \Leftrightarrow 2x = -2 + 37 \Leftrightarrow 2x = 35 \Leftrightarrow x = 35/2$ et $35/2 \in [4/7; +\infty[$

Finalement l'équation $f(x) = -2$ a deux solutions $S = \{-13/38; 35/2\}$

De même, si on veut résoudre l'inéquation $f(x) \leq 3$, il faut lier les cinq cas différents :

a) $-2x + 37 \leq 3$

$\Leftrightarrow -2x \leq 3 - 37$

$\Leftrightarrow -2x \leq -34$

$\Leftrightarrow x \geq 17$

On $x \in]-\infty; -5/3]$

donc aucune valeur ne convient

b) $-8x + 27 \leq 3$

$\Leftrightarrow -8x \leq 3 - 27$

$\Leftrightarrow -8x \leq -24$

$\Leftrightarrow x \geq 3$

On $x \in [-5/3; -7/5]$

donc aucune valeur ne convient

c) $-38x - 15 \leq 3$

$\Leftrightarrow -38x \leq 3 + 15$

$\Leftrightarrow -38x \leq 18$

$\Leftrightarrow x \geq -9/19$

On $x \in [-7/5; 1/2]$

donc $S_3 = [-9/19; 1/2]$

d) $-26x - 21 \leq 3$

$\Leftrightarrow -26x \leq 3 + 21$

$\Leftrightarrow -26x \leq 24$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{12}{13}$

On $x \in [1/2; 4/7]$

donc $S_4 = [1/2; 4/7]$

e) $2x - 37 \leq 3$

$\Leftrightarrow 2x \leq 3 + 37$

$\Leftrightarrow 2x \leq 40$

$\Leftrightarrow x \leq 20$

On $x \in [4/7; +\infty[$ donc $S_5 = [4/7; 20]$

Finalement la solution S de l'inéquation

$f(x) \leq 3$ est $S = S_3 \cup S_4 \cup S_5$

$S = [-9/19; 20]$