

Equation avec valeur absolue

Par définition, $|E(x)| = E(x)$ si $E(x) \geq 0$ et $|E(x)| = -E(x)$ si $E(x) \leq 0$, $E(x)$ étant une expression mathématique quelconque. Les seules formules de calcul autorisées sont $|x y| = |x| |y|$ et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ avec $y \neq 0$. Pour travailler avec une valeur absolue il faut donc éliminer dans ses différents suivant le signe de $E(x)$ pour pouvoir éliminer les bornes de valeur absolue, car tout ce qu'il faut savoir, on ne peut quasiment rien faire avec $|E(x)|$.

* Exemple 1 On se propose de résoudre $| -3x - 5 | = 8$ (E)

On doit traiter deux cas différents qui dépendent du signe de $-3x - 5$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } -3x - 5 \leq 0 \\ \Leftrightarrow -3x \leq 5 \\ \Leftrightarrow x \geq -5/3 \quad (1) \end{aligned}$$

Alors dans ce cas
 $| -3x - 5 | = 3x + 5$
et l'équation (E)

$$\begin{aligned} \text{donc } 3x + 5 &= 8 \\ \Leftrightarrow 3x &= 8 - 5 \\ \Leftrightarrow 3x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

La valeur trouvée 1
vérifie la condition (1)

On peut donc retenir
cette valeur comme

solution de (E)

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } -3x - 5 \geq 0 \\ \Leftrightarrow -3x \geq 5 \\ \Leftrightarrow x \leq -5/3 \quad (2) \end{aligned}$$

Alors dans ce cas
 $| -3x - 5 | = -3x - 5$
et l'équation (E)

$$\begin{aligned} \text{donc } -3x - 5 &= 8 \\ \Leftrightarrow -3x &= 8 + 5 \\ \Leftrightarrow -3x &= 13 \\ \Leftrightarrow x &= -13/3 \end{aligned}$$

La valeur trouvée $-13/3$
vérifie la condition (2)

On peut donc retenir
cette valeur comme

solution de (E)

$$\text{Finalement } S(E) = \left\{ -13/3 ; 1 \right\}$$

* Exemple 2 On doit résoudre $| 4x - 5 | = -7$ (E)

On d'après la définition d'une valeur absolue

$$| 4x - 5 | \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc il est impossible d'avoir $| 4x - 5 | = -7$

$$\text{donc } S(E) = \{ \emptyset \} \quad \text{Il n'y a aucune solution}$$

Equation avec valeur absolue

D'après le cours, $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -B(x) \\ -A(x) = B(x) \\ -A(x) = -B(x) \end{cases}$

En fait, ces quatre cas se réduisent à deux à savoir $A(x) = B(x)$ ou $A(x) = -B(x)$

* Exemple 3 On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|-2x-9| = |4x-3|$ (E)

On a donc seulement deux cas distincts à traiter

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) & \text{et} \\ \Leftrightarrow -2x-9 &= 4x-3 \\ \Leftrightarrow -2x-4x &= -3+9 \\ \Leftrightarrow -6x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= -6/6 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= -B(x) \\ \Leftrightarrow -2x-9 &= -4x+3 \\ \Leftrightarrow -2x+4x &= 3+9 \\ \Leftrightarrow 2x &= 12 \\ \Leftrightarrow x &= 12/2 = 6 \end{aligned}$$

Finalement $S(E) = \{-1; 6\}$

* Exemple 4 On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|-2x^2+6x+1| = |x^2-5x+4|$ (E)

Il y a donc deux cas distincts à traiter

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) & \text{et} \\ \Leftrightarrow -2x^2+6x+1 &= x^2-5x+4 \\ \Leftrightarrow -2x^2+6x+1-x^2+5x-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x^2+11x-3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= -B(x) \\ \Leftrightarrow -2x^2+6x+1 &= -x^2+5x-4 \\ \Leftrightarrow -2x^2+6x+1+x^2-5x+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2+x+5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -3 & b &= 11 & c &= -3 \\ \Delta &= b^2-4ac = 121-4(-3)(-3) \\ \Delta &= 121-36 = 85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -1 & b &= 1 & c &= 5 \\ \Delta &= 1-4(-1)(5) = 1+20 = 21 \end{aligned}$$

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11-\sqrt{85}}{-6} = \frac{11+\sqrt{85}}{6}$$

$$x' = \frac{-1-\sqrt{21}}{-2} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$x'' = \frac{-1+\sqrt{21}}{-2} = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

$$x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11+\sqrt{85}}{-6} = \frac{11-\sqrt{85}}{6}$$

Finalement $S(E) = \left\{ \frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{11-\sqrt{85}}{6}; \frac{11+\sqrt{85}}{6} \right\}$

* Exemple 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|-2x^2+5x+14| = 10$ (E)

Pour pouvoir résoudre (E), il faut étudier le signe du polynôme du second degré $-2x^2+5x+14$ la fonction de x , pour cela on

résout d'abord l'équation du second degré $-2x^2+5x+14=0$

résolvant d'abord l'équation du second degré $-2x^2+5x+14=0$

$$a = -2 \quad b = 5 \quad c = 14 \quad \text{donc} \quad \Delta = b^2-4ac = 25-4(-2)(14) = 25+112$$

$\Delta = 137$ Il y a donc solutions distinctes x' et x''

Equation avec valeur absolue

* Exemple 5 (mult) $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{137}}{-4} = \frac{5 + \sqrt{137}}{4}$ et $x'' = \frac{5 - \sqrt{137}}{4}$

Puis on applique le théorème du signe d'un trinôme du second degré pour déterminer le signe de $-2x^2 + 5x + 14$ et trouver les bornes de valeur absolue afin de pouvoir déterminer le solution, on obtient

$-2x^2 + 5x + 14$ $\xrightarrow{\text{signe de } a}$ $\xrightarrow{\text{signe de } -a}$ $\xrightarrow{\text{signe de } a}$
 $\xrightarrow{-\infty}$ $-$ $\frac{5 - \sqrt{137}}{4}$ $+$ $\frac{5 + \sqrt{137}}{4}$ $-$ $+\infty$

On a deux cas différents à traiter

- Si $x \in]-\infty; \frac{5 - \sqrt{137}}{4}] \cup [\frac{5 + \sqrt{137}}{4}; +\infty[$ alors l'équation (E) devient

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 14 &= 10 & \text{car } -2x^2 + 5x + 14 \leq 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 24 &= 0 & a=2 \quad b=-5 \quad c=-24 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(-24)2 = 25 + 192 = 217 \quad \Delta > 0$$

donc deux solutions distinctes $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{217}}{4}$ et

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{217}}{4}$$

- Si $x \in [\frac{5 - \sqrt{137}}{4}; \frac{5 + \sqrt{137}}{4}]$ alors l'équation (E) devient

$$\begin{aligned} -2x^2 + 5x + 14 &= 10 & \text{car } -2x^2 + 5x + 14 \geq 0 \\ \Leftrightarrow -2x^2 + 5x + 4 &= 0 & a=-2 \quad b=5 \quad c=4 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(-2)4 = 25 + 32 = 57 \quad \Delta > 0$$

donc deux solutions distinctes $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{57}}{-4} = \frac{5 + \sqrt{57}}{4}$

$$\text{et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{57}}{-4} = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}$$

Finalement $S(E) = \left\{ \frac{5 - \sqrt{217}}{4}; \frac{5 - \sqrt{57}}{4}; \frac{5 + \sqrt{57}}{4}; \frac{5 + \sqrt{217}}{4} \right\}$

- * Exemple 6 On se propose de résoudre l'équation (E) $|-4x^2 - 5x + 3| = -2$

On d'après la définition d'une valeur absolue,

$$|-4x^2 - 5x + 3| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pour conséquent il est impossible d'avoir $|-4x^2 - 5x + 3| = -2$

d'où $S(E) = \{\emptyset\}$ Il n'y a aucune solution