

Equation irrationnelle

On appelle équation irrationnelle toute équation au l'incconnue x se trouve sous au moins un radical. Pour la résoudre il faut poser des conditions d'existence de ce radical pour pouvoir continuer le calcul

* Exemple 1 On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3x-2} = 5$ (E)

la condition à poser est $3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2/3$ (1)

C'est la condition d'existence de la même racine, puis on résout (E)

$$\sqrt{3x-2} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt{3x-2})^2 = 5^2 \Leftrightarrow 3x-2 = 25 \Leftrightarrow 3x = 27 \Leftrightarrow x = 9$$

la solution trouvée $x=9$ vérifie (1) donc $S(E) = \{9\}$

* Exemple 2 On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{7x+4} = \sqrt{8x-9}$ (E)

Conditions à poser $7x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 7x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -4/7$ (1)

et $8x-9 \geq 0 \Leftrightarrow 8x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 9/8$ (2)

$$\text{Résolution : } \sqrt{7x+4} = \sqrt{8x-9} \Leftrightarrow 7x+4 = 8x-9$$

$$\Leftrightarrow 7x-8x = -9-4 \Leftrightarrow -x = -13 \Leftrightarrow x = 13$$

la solution trouvée $x=13$ vérifie (1) et (2) donc $S(E) = \{13\}$

* Exemple 3 Résolvons l'équation $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 1$ (E)

Conditions : $2x+5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -5/2$ (1)

et $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ (2)

$$\text{Résolution } \sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x+5 - 2\sqrt{2x+5}\sqrt{x-1} + x-1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x+4-1 = 2\sqrt{2x+5}\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (3x+3)^2 = 2^2(2x+5)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 18x + 9 = 4(2x^2 - 2x + 5x - 5)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 18x + 9 = 8x^2 + 12x - 20$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 29 = 0 \quad a=1 \quad b=6 \quad c=29$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 29 = 36 - 116 = -80 \quad \Delta < 0$$

Donc (E) n'a pas de solution

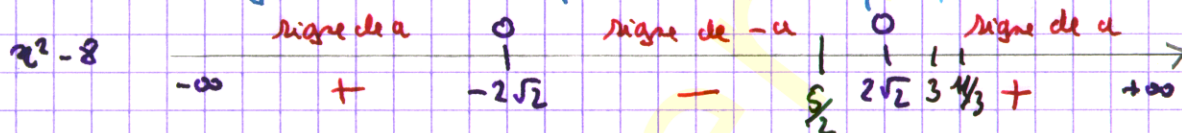
$$\underline{S(E) = \{\emptyset\}}$$

Equation irrationnelle

* Exemple 4 On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation irrationnelle $\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5$ (*)

Dans ce cas il faut poser deux contraintes, en effet il faut d'une part que $x^2 - 8 \geq 0$ pour que la racine carrée soit définie, et d'autre part il faut que $2x - 5 \geq 0$ car cette expression doit être positive comme la racine carrée.

- Contrainte $x^2 - 8 \geq 0$ il s'agit d'une équation du second degré, on doit donc en premier temps résoudre l'équation $x^2 - 8 = 0$ ce qui donne $x' = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ ou $x'' = +\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, puis on applique le théorème du signe d'un trinôme pour trouver le signe de $x^2 - 8$ la fonction de x ce qui nous donne



Par conséquent ① $x \in]-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty[$ comme on veut $x^2 - 8 \geq 0$

- Contrainte $2x - 5 \geq 0$ $\Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 5/2$ ② $\Leftrightarrow x \in [5/2; +\infty[$

① ET ② nous donne $x \in [2\sqrt{2}; +\infty[$

Maintenant on peut résoudre l'équation

$$\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 8 = (2x - 5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 20x - 33 = 0 \quad a = -3 \quad b = 20 \quad c = -33 \quad \text{donc } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{et } \Delta = 20^2 - 4(-3)(-33) = 400 - 396 = 4 \quad \Delta > 0 \quad \text{Il y a deux solutions}$$

$$\text{distinctes } x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 - \sqrt{4}}{-6} = \frac{-20 - 2}{-6} = \frac{-22}{-6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

$$\text{et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 + 2}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Quand on a trouvé les solutions, il faut bien vérifier qu'elles sont bien dans l'intervalle obtenu par les contraintes et savoir $[2\sqrt{2}; +\infty[$

Or $11/3 \in [2\sqrt{2}; +\infty[$ on peut donc retenir cette solution

et $3 \in [2\sqrt{2}; +\infty[$ cette solution peut également être retenue

Finalement $S(*) = \{3; 11/3\}$