

Composition de fonctions

La composition de fonctions qui se note $\circ$ et se lit "rend", consiste à appliquer successivement à une variable x la première fonction de la composition, à son image y la seconde, etc. Généralement la composition de fonctions n'est pas commutative c'est à dire que $f \circ g(x) = f(g(x)) \neq g \circ f(x) = g(f(x))$. Il faut accorder une attention toute particulière aux domaines de définition des fonctions de départ et de leur composée finale.

* On considère la fonction $f(x) = -3x + 4$ avec $D_f = \mathbb{R}$ et la fonction $g(x) = \frac{5x-3}{-2x+4}$ avec $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

? $g \circ f(x)$
$$x \xrightarrow{f} -3x+4 = y \xrightarrow{g} \frac{5y-3}{-2y+4}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(-3x+4) = \frac{5(-3x+4)-3}{-2(-3x+4)+4} = \frac{-15x+20-3}{6x-8+4} = \frac{-15x+17}{6x-4}$$

avec $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{2/3\} =]-\infty; 2/3[\cup]2/3; +\infty[$

? $f \circ g(x)$
$$x \xrightarrow{g} \frac{5x-3}{-2x+4} = y \xrightarrow{f} -3y+4$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{5x-3}{-2x+4}\right) = -3\left(\frac{5x-3}{-2x+4}\right) + 4 = \frac{-15x+9}{-2x+4} + \frac{4(-2x+4)}{-2x+4}$$

$$f \circ g(x) = \frac{-15x+9-8x+16}{-2x+4} = \frac{-23x+25}{-2x+4}$$

avec $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

* On considère les fonctions $f(x) = 2x+1$ avec $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = x^2+3$ avec $D_g = \mathbb{R}$ et $h(x) = \frac{3x}{x-3}$ avec $D_h = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

? $h \circ g \circ f(x)$
$$x \xrightarrow{f} 2x+1 = y \xrightarrow{g} y^2+3 = z \xrightarrow{h} \frac{3z}{z-3}$$

$$h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x))) = h(g(2x+1)) = h((2x+1)^2+3)$$

$$h \circ g \circ f(x) = h(4x^2+4x+1+3) = h(4x^2+4x+4) = \frac{3(4x^2+4x+4)}{4x^2+4x+4-3}$$

$$h \circ g \circ f(x) = \frac{12(x^2+x+1)}{4x^2+4x+1} = \frac{12(x^2+x+1)}{(2x+1)^2} \text{ avec } D_{h \circ g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$$

? $f \circ h \circ g(x)$
$$x \xrightarrow{g} x^2+3 = y \xrightarrow{h} \frac{3y}{y-3} = z \xrightarrow{f} 2z+1$$

$$f \circ h \circ g(x) = f(h(g(x))) = f(h(x^2+3)) = f\left(\frac{3x^2+9}{x^2-3}\right)$$

$$f \circ h \circ g(x) = \frac{6x^2+18}{x^2-3} + 1 = \frac{6x^2+18+x^2-3}{x^2-3} = \frac{7x^2+15}{x^2-3} \text{ avec } D_{f \circ h \circ g} = \mathbb{R}^*$$

Composition de fonctions

* $f(x) = x^2 - 5x + 3$ avec $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x-3}$ avec $D_g = [3; +\infty[$, $h(x) = -\frac{5}{x^2}$
avec $D_h = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

? $f \circ g(x)$ $x \xrightarrow{g} \sqrt{x-3} = y \xrightarrow{f} y^2 - 5y + 3$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-3}) = (\sqrt{x-3})^2 - 5\sqrt{x-3} + 3 = x - 3 - 5\sqrt{x-3} + 3$

$f \circ g(x) = x - 5\sqrt{x-3}$ avec $D_{f \circ g} = [3; +\infty[$ à cause de la constante sur la racine

? $g \circ f(x)$ $x \xrightarrow{f} x^2 - 5x + 3 = y \xrightarrow{g} \sqrt{y-3}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 5x + 3) = \sqrt{x^2 - 5x + 3 - 3} = \sqrt{x^2 - 5x}$

? $D_{g \circ f}$ Il y a une constante d'existence de la même racine qui est $x^2 - 5x \geq 0$

c'est une inéquation du second degré qui se résout à l'aide du théorème du signe

d'un trinôme du second degré $x^2 - 5x$

signe de a		signe de $-a$		signe de a	
$-\infty$	$+$	0	$-$	5	$+$
					$+\infty$

$x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x-5=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=5$

On a donc $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[$ d'où $D_{g \circ f} =]-\infty; 0] \cup [5; +\infty[$

? $h \circ g \circ f(x)$ $x \xrightarrow{f} x^2 - 5x + 3 = y \xrightarrow{g} \sqrt{y-3} = z \xrightarrow{h} -\frac{5}{z^2}$

$h \circ g \circ f(x) = h(g(f(x))) = h(g(x^2 - 5x + 3)) = h(\sqrt{x^2 - 5x + 3 - 3}) = h(\sqrt{x^2 - 5x})$

$h \circ g \circ f(x) = h(\sqrt{x^2 - 5x}) = \frac{-5}{(\sqrt{x^2 - 5x})^2} = \frac{-5}{x^2 - 5x} = \frac{-5}{x(x-5)} = \frac{5}{x(5-x)}$

la constante d'existence de la fonction est $x(5-x) \neq 0$ d'où $D_{h \circ g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$

$D_{h \circ g \circ f} =]-\infty; 0[\cup]0; 5[\cup]5; +\infty[$

? $h \circ f \circ g(x)$ $x \xrightarrow{g} \sqrt{x-3} = y \xrightarrow{f} y^2 - 5y + 3 = z \xrightarrow{h} -\frac{5}{z^2}$

$h \circ f \circ g(x) = h(f(g(x))) = h(f(\sqrt{x-3})) = h(\sqrt{x-3}^2 - 5\sqrt{x-3} + 3)$

$h \circ f \circ g(x) = h(x - 3 - 5\sqrt{x-3} + 3) = h(x - 5\sqrt{x-3}) = \frac{-5}{(x - 5\sqrt{x-3})^2}$

Dans ce cas il y a deux constantes, l'une pour l'existence de la même racine qui est

$x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ (1) et l'autre pour l'existence de la fonction (2) $x - 5\sqrt{x-3} \neq 0$

On résout $x - 5\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x^2 = 25(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 25x + 75 = 0$

$a=1$ $b=-25$ $c=75$ d'où $\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4 \times 75 = 25 \times 25 - 4 \times 3 \times 25 = 13 \times 25$

Donc il y a deux solutions $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 5\sqrt{13}}{2}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 + 5\sqrt{13}}{2}$

(1) ET (2) $\rightarrow$ Finalement $D_{h \circ f \circ g} = [3; \frac{25 - 5\sqrt{13}}{2}[\cup]\frac{25 - 5\sqrt{13}}{2}; \frac{25 + 5\sqrt{13}}{2}[\cup]\frac{25 + 5\sqrt{13}}{2}; +\infty[$